「逃走中」オープニングゲームの確率

2012. 1.15
Written by **ma–.** (caLabo.)

1　はじめに

筆者は「逃走中」という番組が好きで良く見ています。この番組をご存じないという方もご心配なく, 話の本質は数学ですので。

とはいえ, 一応簡単に解説しておきます。「逃走中」は, 要するに「壮大な鬼ごっこ」です。鬼を「ハンター」, それ以外を「逃走者」と呼びます。逃走者に与えられる賞金が 1 秒ごとに上がっていきますが, ハンターに捕まれば（「確保される」と表現します）その時点でその逃走者はゲーム終了, 賞金はゼロとなります。制限時間内逃げ切るか, あるいは制限時間途中で「自首電話」を掛けるとその時点での賞金を獲得することができます。

この番組には「オープニングゲーム」が存在します。

以前のオープニングゲームは, 束ねられた鎖を 1 人 1 人引いていって, 1 本だけあるハズレを引いた瞬間に目の前に格納されていたハンターが一斉に放出されてゲームがスタートしました。この方式の場合, 誰かが必ずハズレを引くように設定されていたため, ゲームスタート時に必ず 1 人は確保されました。

現行のオープニングゲームはサイコロを振る方式です。ただし「1」の目は「ハンターの目」となっており, 1 人 1 人サイコロを振っていって「ハンターの目」が出た瞬間にゲームがスタートします。逆に 2〜6 の目が出ればハンターボックス（ハンターが格納されている箱）が 1 マスずつこちらに向かってきて, 16 マス進んだ時点でオープニングゲームはクリアとなり, その 1 分後にハンターが放出されます。

つまり逃走者全員に有利なゲーム開始もあり得ることとなったのです。現に, ここ 2 回ほどはオープニングゲームはクリアできています。

さて本題です。

この「逃走中」の「オープニングゲーム」をクリアできる確率はどれほどなのか, ということです。

2　実際の確率計算

以前は「成功」などという設定そのものが存在しませんでしたから, このチャンスを与えられたとはいえ低く設定されているのかと思っていました。しかし 2 連続成功しているという事実もあり, 意外と確率は高いのかな, とも思えるわけです。

ゲームクリアまでにサイコロを振る回数が一定していないので, この確率を求めるのは意外と難儀です。

最も簡単な, しかしながら面倒な方法は, 樹形図をすべて描ききることです。実は思ったほど時間は掛かりません。是非やってみてください。

ここでは, 次のように求めてみます。

今ハンターボックスがあるマスの位置を x, マスの位置が x のとき「ハンターの目」を出さずに 16 マス以上に到達できる確率を $P(x)$ とします。

$$P(14) = P(15) = \frac{5}{6}$$

です。なぜなら, 「ハンターの目」以外はすべてクリアとなるからです。

$$P(13) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(15)$$

です。つまり, いきなりクリアできる確率はサイコロが 3〜6 の目が出た場合でその確率が $\frac{4}{6}$, サイコロが 2 の場合は 15 マスまで行けますので, 次に $P(15)$ の確率でクリアとなります。その合計が $P(13)$ だろう, というわけです。

この方式で順次 x を減らしていくと

$$\begin{aligned}
P(12) &= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(15) + \frac{1}{6} \cdot P(14) \\
P(11) &= \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(15) + \frac{1}{6} \cdot P(14) + \frac{1}{6} \cdot P(13) \\
P(10) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(15) + \frac{1}{6} \cdot P(14) + \frac{1}{6} \cdot P(13) + \frac{1}{6} \cdot P(12) \\
P(9) &= \frac{1}{6} \cdot P(15) + \frac{1}{6} \cdot P(14) + \frac{1}{6} \cdot P(13) + \frac{1}{6} \cdot P(12) + \frac{1}{6} \cdot P(11)
\end{aligned}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P(0) = \frac{1}{6}\cdot P(6) + \frac{1}{6}\cdot P(5) + \frac{1}{6}\cdot P(4) + \frac{1}{6}\cdot P(3) + \frac{1}{6}\cdot P(2)$$

という式を規則的に導くことができます。あとは, 実際の数値計算を行うだけです。

$$P(14) = P(15) \quad = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} P(13) &= \frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot P(15) \\ &= \frac{4}{6} + \frac{5}{6^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(12) &= \frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot P(15) + \frac{1}{6}\cdot P(14) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6^2} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{10}{6^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(11) &= \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot P(15) + \frac{1}{6}\cdot P(14) + \frac{1}{6}\cdot P(13) \\ &= \frac{2}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6^2}\right) \\ &= \frac{2}{6} + \frac{14}{6^2} + \frac{5}{6^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(10) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot P(15) + \frac{1}{6}\cdot P(14) + \frac{1}{6}\cdot P(13) + \frac{1}{6}\cdot P(12) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6^2}\right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{17}{6^2} + \frac{15}{6^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(9) &= \frac{1}{6}\cdot P(15) + \frac{1}{6}\cdot P(14) + \frac{1}{6}\cdot P(13) + \frac{1}{6}\cdot P(12) + \frac{1}{6}\cdot P(11) \\
&= \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6} + \frac{14}{6^2} + \frac{5}{6^3}\right) \\
&= \frac{19}{6^2} + \frac{29}{6^3} + \frac{5}{6^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(8) &= \frac{1}{6}\cdot P(14) + \frac{1}{6}\cdot P(13) + \frac{1}{6}\cdot P(12) + \frac{1}{6}\cdot P(11) + \frac{1}{6}\cdot P(10) \\
&= \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6^2}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6} + \frac{14}{6^2} + \frac{5}{6^3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{17}{6^2} + \frac{15}{6^3}\right) \\
&= \frac{15}{6^2} + \frac{46}{6^3} + \frac{20}{6^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(7) &= \frac{1}{6}\cdot P(13) + \frac{1}{6}\cdot P(12) + \frac{1}{6}\cdot P(11) + \frac{1}{6}\cdot P(10) + \frac{1}{6}\cdot P(9) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6} + \frac{14}{6^2} + \frac{5}{6^3}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{17}{6^2} + \frac{15}{6^3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{19}{6^2} + \frac{29}{6^3} + \frac{5}{6^4}\right) \\
&= \frac{10}{6^2} + \frac{65}{6^3} + \frac{49}{6^4} + \frac{5}{6^5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(6) &= \frac{1}{6}\cdot P(12) + \frac{1}{6}\cdot P(11) + \frac{1}{6}\cdot P(10) + \frac{1}{6}\cdot P(9) + \frac{1}{6}\cdot P(8) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6} + \frac{14}{6^2} + \frac{5}{6^3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{17}{6^2} + \frac{15}{6^3}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{19}{6^2} + \frac{29}{6^3} + \frac{5}{6^4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{15}{6^2} + \frac{46}{6^3} + \frac{20}{6^4}\right) \\
&= \frac{6}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{95}{6^4} + \frac{25}{6^5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(5) &= \frac{1}{6}\cdot P(11) + \frac{1}{6}\cdot P(10) + \frac{1}{6}\cdot P(9) + \frac{1}{6}\cdot P(8) + \frac{1}{6}\cdot P(7) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6} + \frac{14}{6^2} + \frac{5}{6^3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{17}{6^2} + \frac{15}{6^3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{19}{6^2} + \frac{29}{6^3} + \frac{5}{6^4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{15}{6^2} + \frac{46}{6^3} + \frac{20}{6^4}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{10}{6^2} + \frac{65}{6^3} + \frac{49}{6^4} + \frac{5}{6^5}\right) \\
&= \frac{3}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{160}{6^4} + \frac{75}{6^5} + \frac{5}{6^6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(4) &= \frac{1}{6}\cdot P(10) + \frac{1}{6}\cdot P(9) + \frac{1}{6}\cdot P(8) + \frac{1}{6}\cdot P(7) + \frac{1}{6}\cdot P(6) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{17}{6^2} + \frac{15}{6^3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{19}{6^2} + \frac{29}{6^3} + \frac{5}{6^4}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{15}{6^2} + \frac{46}{6^3} + \frac{20}{6^4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{10}{6^2} + \frac{65}{6^3} + \frac{49}{6^4} + \frac{5}{6^5}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{6}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{95}{6^4} + \frac{25}{6^5}\right) \\
&= \frac{1}{6^2} + \frac{67}{6^3} + \frac{230}{6^4} + \frac{169}{6^5} + \frac{30}{6^6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(3) &= \frac{1}{6}\cdot P(9) + \frac{1}{6}\cdot P(8) + \frac{1}{6}\cdot P(7) + \frac{1}{6}\cdot P(6) + \frac{1}{6}\cdot P(5) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{19}{6^2} + \frac{29}{6^3} + \frac{5}{6^4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{15}{6^2} + \frac{46}{6^3} + \frac{20}{6^4}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{10}{6^2} + \frac{65}{6^3} + \frac{49}{6^4} + \frac{5}{6^5}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{6}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{95}{6^4} + \frac{25}{6^5}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{160}{6^4} + \frac{75}{6^5} + \frac{5}{6^6}\right) \\
&= \frac{53}{6^3} + \frac{290}{6^4} + \frac{329}{6^5} + \frac{105}{6^6} + \frac{5}{6^7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(2) &= \frac{1}{6}\cdot P(8) + \frac{1}{6}\cdot P(7) + \frac{1}{6}\cdot P(6) + \frac{1}{6}\cdot P(5) + \frac{1}{6}\cdot P(4) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{15}{6^2} + \frac{46}{6^3} + \frac{20}{6^4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{10}{6^2} + \frac{65}{6^3} + \frac{49}{6^4} + \frac{5}{6^5}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{6}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{95}{6^4} + \frac{25}{6^5}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{160}{6^4} + \frac{75}{6^5} + \frac{5}{6^6}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^2} + \frac{67}{6^3} + \frac{230}{6^4} + \frac{169}{6^5} + \frac{30}{6^6}\right) \\
&= \frac{35}{6^3} + \frac{328}{6^4} + \frac{554}{6^5} + \frac{274}{6^6} + \frac{35}{6^7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \frac{1}{6}\cdot P(7) + \frac{1}{6}\cdot P(6) + \frac{1}{6}\cdot P(5) + \frac{1}{6}\cdot P(4) + \frac{1}{6}\cdot P(3) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{10}{6^2} + \frac{65}{6^3} + \frac{49}{6^4} + \frac{5}{6^5}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{6}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{95}{6^4} + \frac{25}{6^5}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{160}{6^4} + \frac{75}{6^5} + \frac{5}{6^6}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^2} + \frac{67}{6^3} + \frac{230}{6^4} + \frac{169}{6^5} + \frac{30}{6^6}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{53}{6^3} + \frac{290}{6^4} + \frac{329}{6^5} + \frac{105}{6^6} + \frac{5}{6^7}\right) \\
&= \frac{20}{6^3} + \frac{335}{6^4} + \frac{824}{6^5} + \frac{603}{6^6} + \frac{140}{6^7} + \frac{5}{6^8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(0) &= \frac{1}{6}\cdot P(6) + \frac{1}{6}\cdot P(5) + \frac{1}{6}\cdot P(4) + \frac{1}{6}\cdot P(3) + \frac{1}{6}\cdot P(2) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{6}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{95}{6^4} + \frac{25}{6^5}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{160}{6^4} + \frac{75}{6^5} + \frac{5}{6^6}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^2} + \frac{67}{6^3} + \frac{230}{6^4} + \frac{169}{6^5} + \frac{30}{6^6}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{53}{6^3} + \frac{290}{6^4} + \frac{329}{6^5} + \frac{105}{6^6} + \frac{5}{6^7}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{35}{6^3} + \frac{328}{6^4} + \frac{554}{6^5} + \frac{274}{6^6} + \frac{35}{6^7}\right) \\
&= \frac{10}{6^3} + \frac{305}{6^4} + \frac{1103}{6^5} + \frac{1152}{6^6} + \frac{414}{6^7} + \frac{40}{6^8} \\
&= \frac{10\cdot 6^5 + 305\cdot 6^4 + 1103\cdot 6^3 + 1152\cdot 6^2 + 414\cdot 6 + 40}{6^8} \\
&= \frac{755284}{1679616} \quad = \frac{188821}{419904}
\end{aligned}
$$

というわけで, 結果的に $\dfrac{188821}{419904}$ という分数が算出されました。実際に分子を分母で割って百分率で表すと,「逃走中」のオープニングゲームをクリアできる確率は約 45% であることがわかりました。

筆者としては, 以前は誰か 1 人が必ずオープニングゲームで捕まる仕様だったことを考えると番組の思惑としてはもっと低い確率を設定してたのでは？

と考えてますけれど, どうなんでしょうか。そうでもなくって, 最初からちゃんとフィフティ・フィフティに近い確率になるように設定していたんでしょうかね。皆さんはどう感じましたか？