1 個のサイコロを投げ続けて n 回目に初めて 1 の目が出る確率

2012. 1.22

Written by ***ma–.*** (caLabo.)

1　n 回目に初めて 1 の目が出る確率

1 個のサイコロを続けて投げていると, 奇跡的に 1 の目が数回連続出たりして喜ぶことがあります。逆に, 10 回投げても出ない！　なんてことはありませんか？

そもそもサイコロの目は 6 個なので, 6 回投げている間に 1 回は 1 の目が出そうなもんですよね。サイコロを 6 回投げたときのそれぞれの目の出る回数の期待値は, どの目も 1 回ずつであり, これはこれで正解。だからといって, じゃぁ 6 回目までに必ず 1 の目が出るかというとそうでもないのが現実です。

1 回目にいきなり 1 の目が出る確率は当然 $\dfrac{1}{6}$（約 16.7%）です。

2 回目に初めて 1 の目が出る場合, 1 回目は「1 以外」の目が出る必要があるので, その確率は

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

つまり, $\dfrac{5}{36}$（約 13.9%）と下がってしまいます。

「じゃぁ 1 回目が一番 1 の目が出やすいのか！」と考えるのは早合点。「初めて出る」というところがポイントで, どの回でも「その回だけ考えれば」1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ で同じです。しかし, 「初めて出る」という条件が付くと, 例えば 5 回目にであれば「1 回目から 4 回目までは 1 以外の目しか出てはいけない」という条件が付く分確率が低くなるのです。だから, n 回目の n の値が増えれば増えるほど, 「初めて出る」確率は下がっていくことになります。

もうちょっと突っ込んで書くと, 「1 回目に初めて」と「2 回目に初めて」と「3 回目に初めて」と……と, n の値が異なる「初めて」1 の目が出る確率はすべて互いに排反です。ですから, すべての n についてその確率を合計するとちょうど 100% になるハズです。ここで n が無限に存在する（n はすべての自然数を値として取り得る！）ことが事を面倒にしています。「1 億回目に初

めて 1 の目が出る」なんという現実味のない問題であっても, その確率は「完全にゼロ」ではないのです。

2　n の期待値の求め方

さて, 問題の期待値を求める計算式を作るのは, 実はまったく難しくはありません。表にすると

$$
\begin{array}{lll}
1\text{ 回目に初めて }1\text{ の目が出る} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{6} \\
2\text{ 回目に初めて }1\text{ の目が出る} & \cdots\cdots & \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6} \\
3\text{ 回目に初めて }1\text{ の目が出る} & \cdots\cdots & \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6} \\
4\text{ 回目に初めて }1\text{ の目が出る} & \cdots\cdots & \left(\dfrac{5}{6}\right)^3\cdot\dfrac{1}{6} \\
\qquad\qquad\cdots & \vdots & \vdots \\
n\text{ 回目に初めて }1\text{ の目が出る} & \cdots\cdots & \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{6}
\end{array}
$$

ということですから, その期待値は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\times 1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\times 2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\times 3+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\times n\right)$$ [注1]

を計算すれば求めることができます。問題は, この極限をどうやって計算するか？　ということです。

ぶっちゃけ, 筆者の能力では計算不能です。ごめんなさい。

じゃ, この問題は諦めるのか……いえ, そうではありません。今の考え方は期待値の基本に還った非常にシンプルなものでしたが, 計算はうまくいきません。ところが期待値の基本には則っていないものの, 「無限」の考え方を逆手に取った実に巧妙な方法があるのです。

[注1] 高 1 では習わない極限の記号が出てきましたが, ここでは余り気にしないでください。

まず, この期待値を求めることができて, その回数を n とおくことにします。するとこの期待値は, 「1 回目から数えて」平均的に n 回目に初めて 1 の目が出るということを意味します。

これを, ちょっとズルして「2 回目から数える」とどうでしょうか。1 回目を無視します。というか, 1 回目には 1 の目が出なかったと既に判っているものとします。すると, 2 回目から仕切り直しのような形になりますから, 「2 回目から数えて」平均的に n 回目に初めて 1 の目が出ることになります。このことを「1 回目に遡って」考えると, もしも 1 回目に 1 の目が出なかったと判ってしまった場合, 「1 回目から数える」と平均的に $n+1$ 回目に 1 の目が出るように見えるはずです。n 回目というのはあくまでも 1 回目に 1 の目が出るかどうかもまだ判らない状態での話なのです。

ちょっと表現が回りくどかったかもしれませんが, 理解できましたか？

以上のことが理解出来れば, 期待値 n を求める式がもう 1 つ発見できたことになります。

1 回目に 1 の目が出た場合（その確率は $\dfrac{1}{6}$ です）, もちろん「1 回目に初めて 1 の目が出た」ということになります。

1 回目に 1 の目が出なかった場合（その確率は $\dfrac{5}{6}$ です）, 「$n+1$ 回目に初めて 1 の目が出る」ことになります。

よって

$$n = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times (n+1)$$

という恐ろしいほどシンプルな方程式ができてしまいます。ここまで来ればあとは簡単な 1 次方程式を解くだけです。その答えは $n = 6$, つまり平均的に 6 回目に初めて 1 の目が出る, ということです。

3　おわりに

ところで, 前回「逃走中オープニングゲームの勝率」でさいころを扱っています。無限を扱う場合（今回）と扱わない場合（前回）で, 随分イメージが違うなと感じることでしょう。

実際前回の場合, さいころは最大でも 8 回しか投げないので, 平均的に 6 回

で初めて 1 の目が出るさいころで負ける気がしないと思います。しかし無限ではなく有限回数ですから, そもそもその有限回数で 1 の目がまったくでないということもあり得て, 今回の期待値を考えること自体実はナンセンスだということになります。

前回の場合, 1 回 1 の目が出ないごとに勝率がどんどん上がっていきます。さいころの性質自体は変わらないのでここから平均的に 6 回「先」で初めて 1 の目が出る可能性が高いわけですが, この「6 回」が残された試行回数を超えてくるからです。

しかし今回の場合, 1 回 1 の目が出なかったとしてもここからまた平均的に 6 回「先」で初めて 1 の目が出る可能性が高いというニュアンスになります。残された試行回数も無限だからです。先程の巧妙な解法も, この考え方を用いています。

何だか不思議な感じがしますね。