# 2 放物線によって囲まれる部分の面積

2014.11.24 - 2014.12.14
*Written by* ***ma–.*** (`caLabo.`)

## 1　はじめに

2014 年もあと 1 ヶ月を残すのみとなりました。ここにきて急転直下（?）の衆議院解散, 総選挙。いやー, 参りました。仕方がないので, 数学でもやりましょうか（えっ？

あっ, もちろん「選挙を無視して数学ばかりやりましょうか」という意味ではないですよ。皆さん, 投票日にはきちんと投票に行きましょう。事前に無理なことがわかっている場合は, 期日前投票に行きましょう。

さて, 今回の主人公は**放物線**です。

## 2　放物線

そもそも**放物線**とは何でしょう？　まぁこれをご覧になっている方々の殆どはご存じのことでしょうが, 一応確認しておきます。
これはもちろん曲線なのですが, その軌跡が**放物線**という名前の如く**物**を**放**ったときに描く曲線であることに由来します。

ちょっと難しい話になりますが, 物理的にこの「物を放る」ことを考えてみます。
ある地点からボールを, 水平面から $\theta$ の角度で初速度 $v$ で打ち上げてみます。空気抵抗など, 重力以外の要素は一切考えないことにします。このとき, 水平方向の初速度は $v\cos\theta$, 鉛直方向の初速度は $v\sin\theta$ となります。
重力以外の要素は一切考えないのですから, このボールは水平方向には等速直線運動をし続けます。つまり, $t$ 秒後の水平方向の速度 $v_x(t)$ は, 時間 $t$ に依らず常に

$$v_x(t) = v\cos\theta$$

を保ちます。

重力加速度を $g(\mathrm{m/s^2})$[注1] とします。打ち上げた瞬間からの経過時間を $t$(秒) とすると, $t$ 秒後の鉛直方向の速度 $v_y(t)$ は, 重力加速度によって 1 秒間毎に鉛直方向の逆方向（つまり直感的に「下」の方向）に $g$ という速度が加わることになりますから

$$v_y(t) = v\sin\theta - gt$$

となります。

さて, $t$ 秒後のボールの位置 $(p_x(t),\ p_y(t))$ を考えます。この位置は, 打ち上げた瞬間の位置を便宜上原点であったとすると

$$\begin{aligned}
p_x(t) &= \int_0^t v_x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t v\cos\theta\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[ vt\cos\theta \Big]_0^t \quad = vt\cos\theta \quad \cdots\cdots \text{①} \\
p_y(t) &= \int_0^t v_y(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t (v\sin\theta - gt)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[ vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \right]_0^t \quad = -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\theta \quad \cdots\cdots \text{②}
\end{aligned}$$

① から $t = \dfrac{p_x(t)}{v\cos\theta}$ を ② に代入すると

$$\begin{aligned}
p_y(t) &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{p_x(t)}{v\cos\theta}\right)^2 + v\cdot\frac{p_x(t)}{v\cos\theta}\cdot\sin\theta \\
&= -\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\{p_x(t)\}^2 + \tan\theta\cdot p_x(t) \quad \cdots\cdots \text{③}
\end{aligned}$$

となり, $p_y(t)$ は $p_x(t)$ に関する 2 次式で表されることがわかります。つまり, 物を放ったときの曲線の軌跡は, **2 次関数**になるということです。

---

**注1** s は「秒」を表すものとします。

③ の右辺を更に計算してみましょう。

$$
\begin{aligned}
p_y(t) &= -\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\left(\{p_x(t)\}^2 - \frac{2v^2\cos^2\theta\tan\theta}{g}p_x(t)\right) \\
&= -\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\left(\left(p_x(t) - \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \left(\frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2\right) \\
&= -\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\left(p_x(t) - \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \qquad \cdots\cdots ④
\end{aligned}
$$

この結果から, この放物線が最も高い地点に到達するときのことを調べてみます。この「最も高い地点」のことを放物線の**頂点**と呼びます。

- $p_y(t)$ は $p_x(t) = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$ のときに最大値 $\dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ をとる。

ところで, $p_x(t) = vt\cos\theta$ でしたから, これを

$$
p_x(t) = \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}
$$

に代入すると

$$
vt\cos\theta = \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g} \qquad \therefore\ t = \frac{v\sin\theta}{g}
$$

つまり

- $p_y(t)$ は $t = \dfrac{v\sin\theta}{g}$ のときに最大値 $\dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ をとる。

と言い換えることができます。

さらに, いったん打ち上げたボールが打ち上げた高さに戻るときのことを考えます。式で考えると $p_y(t) = 0$ のときを考えることになりますから, ④ 式にこれを代入してみると

$$
0 = -\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\left(p_x(t) - \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\left(p_x(t)-\frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 &= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \\
\left(p_x(t)-\frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 &= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{2v^2\cos^2\theta}{g} \\
&= \frac{v^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2} \\
p_x(t)-\frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g} &= \pm\frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g} \\
p_x(t) &= \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\pm\frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g} \\
&= 0,\ \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}
\end{aligned}
$$

$p_x(t)=0$ のときは, 打ち上げた場所を表していますから, 今知りたい $p_x(t)$ の値はもう一方の方です。三角関数の倍角の公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ に注意すると, 次のことがわかりました。

- $p_x(t)=\dfrac{v^2\sin 2\theta}{g}$ のときにボールは打ち上げ時と同じ高さに戻る。

このときの $p_x(t)$ の最大値を求めてみます。$g$ は定数で, $v$ や $\theta$ は初期条件（やっぱり定数）ですが, $\sin 2\theta$ は関数です。$\sin 2\theta$ が最大となるときは, $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$（$90°$）のとき, つまり $\theta=\dfrac{\pi}{4}$（$45°$）のときです。つまり, ボールをなるべく遠くまで飛ばそうと思ったら, $v$（初速度）を上げることは当然のこと, 角度は $45°$ で投げ上げるのが最適であるということです。

さて, どちらかというと数学というよりも物理学っぽいレポートになってきたので, この辺で数学に戻って本題に入りたいと思います。

ちなみにこの「放物線」, 英語では parabola と言います—そう, あの「パラボラアンテナ」のパラボラです。この辺りのことも, このセクションの終盤で触れます。

## 2.1 中学 3 年

放物線そのものは, 中学 3 年で初めて学びます。そのときには

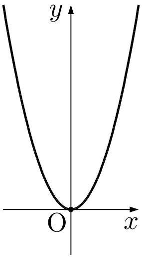
$$y = ax^2 \qquad (a \text{ は比例定数}, a \neq 0)$$

という形の「**2 乗に比例する関数**」しか学びません。

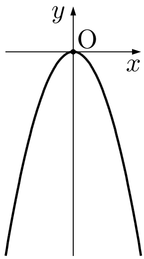
この形の放物線の特徴は

- **頂点**は必ず原点
- $y$ 軸について対称
- $a > 0$ のときは下に凸, $a < 0$ のときは上に凸
- $a$ の絶対値が大きければ幅が狭く, 絶対値が小さければ幅が大きくなる

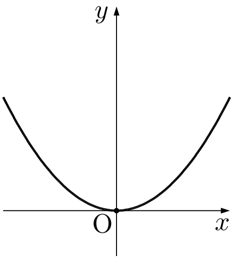
**$a > 0$ のとき**



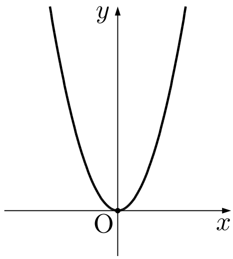

**$a < 0$ のとき**



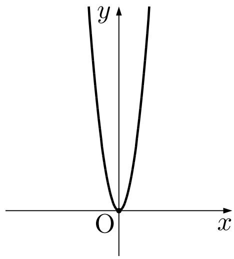

**$a = \frac{1}{5}$ のとき**




**$a = 1$ のとき**




**$a = 5$ のとき**




## 2.2 高校 1 年

高校 1 年の「数学 I」では, 一般的な **2 次関数**を学びます。一般的な, というのは「$x$ の一般的な 2 次式になっている」関数ということで

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

という形をしているということです。

もうこうなると, 頂点が原点であるなどとは言えません。実際, 高校 2 年で学ぶ微分の考え方を用いると

$$f'(x) = 2ax + b$$

ですから, $f'(x) = 0$ とおくことにより $x = -\dfrac{b}{2a}$ のときに $f'(x)$ の正負が入れ替わることがわかります[注2]。つまり, このときの点が頂点となる, ということでもあります。

「数学 I」ではまだ微分は学んでいませんから, 「カッコの 2 乗」を上手く作ることにより頂点の座標を求めさせています。具体的には, 次のような計算の流れです。

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

つまり, カッコの 2 乗が常に 0 以上であることを利用し, このカッコの中身が 0 になるときが $f(x)$ が最小となる[注3]ときだろう, というわけです。

この計算結果から, 頂点の座標が $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ であることもわかります。

頂点の $y$ 座標の分子が, かの有名な「2 次方程式の解の判別式」と同じ数式になっていることは, 決して偶然ではありません。$a > 0$ の場合に限って考えると, 放物線は下に凸となりますから, 放物線が $x$ 軸をまたぐ, つまり頂点の $y$ 座標が負になれば放物線と $x$ 軸との交点が 2 つ存在することになります。これは, 判別式の符号が正になる場合と対応しますが, 実際 $y$ 座標が負になることを考えると, 分母は正です（$a > 0$ としています）から, 分子も正でなければならず, 判別式の符号の結果と一致します。

---

注2 $f'(x)$ が 1 次式であるため, このように言えます。

注3 $a > 0$ のとき。$a < 0$ のときは逆に最大となる。

結果として, 今回の放物線の特徴は次のようになります。

- 頂点を通り $y$ 軸に平行な直線ついて対称
- $a > 0$ のときは下に凸, $a < 0$ のときは上に凸
- $a$ の絶対値が大きければ幅が狭く, 絶対値が小さければ幅が大きくなる
- $b^2 - 4ac$ が正なら $x$ 軸と交わり, 0 なら接し, 負なら交点をもたない

## 2.3 高校 2 年

高校 2 年の「数学 II」[注4]では積分を学びますから, 放物線にまつわる面積を求められるようになります。

このレポートの本題もこの部分なのですが, その割には随分と前段が長いなって？　まぁそういうのも良いでしょう？

## 2.4 高校 3 年

高校 3 年の「数学 III」[注5]になると, 一般的な平面上の **2 次曲線**を学びます。**2 次関数**と何が違うのかというと, 「曲線」と言えば「関数」である必要はないので, $f(x) = (x$ の多項式$)$ という形をしている必要はありません。よって, この場合の「2 次」とは $x$ にも $y$ にも可能性があり, 一般的には

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

という形をしています。もうこうなると, 放物線に限った方程式ではなくなるので, どういった場合が放物線になるのかという判定はかなり厳しいものになります。平成 25 年度からの学習指導要領[注6]で**行列**がキレイサッパリ消えてしまった今となっては高校で計算してみせることは実質できなくなってしまい

[注4] 必須科目ではないので, 学ばないところもあるでしょうし, 高校 3 年で学ぶところもあると思います。

[注5] 必須科目ではないので, 学ばないところもあるでしょう。というかいわゆる「理系クラス」でもなければ学ばないと思います。

[注6] 理科と数学のみ先行して平成 24 年度から始まりました。

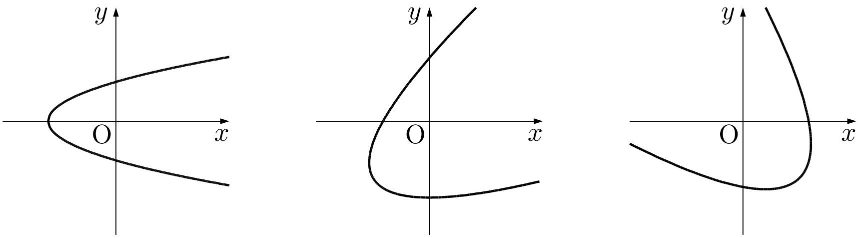
ましたが, 適当に直交変換[注7]した結果

$$2pX - qY^2 = 1 \qquad (p > 0,\, q > 0)$$

と変形できれば放物線です。

放物線としての性質はこれまでと変わらないと言えば変わらないのですが, その「向き」すらどちらを向いていても良いこととなるので, 表現が難しくなります。

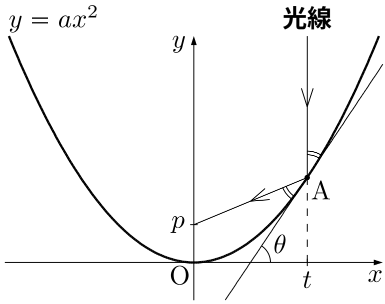
**どんな方向だって向くことができるサ！**




それよりも, 「数学 Ⅲ」では放物線の**焦点**を学びます。先に述べた「パラボラアンテナ」も, この放物線の焦点の性質を利用しています。

ここでは, 実際に空中からパラボラアンテナに降り注いでくる光線が「ある 1 点」に向かう様子を確認してみることにします。

右図は, 上空から光線が降り注ぎ, 放物線 $y = ax^2$ の面によって反射し, $y$ 軸に向かう様を表しています。二重線の角が「反射角」を表しています。$x$ 座標が $t$ である位置から降り注いだ光線が, $y$ 軸の $(0,\ p)$ にぶつかると設定します。




点 A の座標は $(t,\ at^2)$ です。放物線の方程式の導関数 $y' = 2ax$ を利用すると, 点 A における接線の傾きは $2at$ です。よって

$$\tan\theta = 2at$$

---

[注7] 簡単に述べると, $\det(A) = \pm 1$ なる $2 \times 2$ 正方行列 $A$ による 1 次変換をすること。

が成り立ちます。

ところで, $\theta$ が存在する直角三角形の $\theta$ ではない方の鋭角は, 対頂角の性質により二重線の角に等しいです。よって, 二重線の角の大きさを $\alpha$ とすると

$$\tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{\text{注8}} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{2at}$$

よって, 反射光を表す直線（点 A から左下に伸びる直線）の傾きは

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) &= \tan\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \alpha\right\} \\
&= \tan(\theta - \alpha) \\
&= \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha} \qquad (\tan \text{ の加法定理を利用}) \\
&= \frac{2at - \dfrac{1}{2at}}{1 + 2at \cdot \dfrac{1}{2at}} \\
&= at - \frac{1}{4at}
\end{aligned}$$

よって, 反射光を表す直線（点 A から左下に伸びる直線）の方程式は

$$\begin{aligned}
y &= \left(at - \frac{1}{4at}\right)(x - t) + at^2 \\
&= \left(at - \frac{1}{4at}\right)x - at^2 + \frac{1}{4a} + at^2 \\
&= \left(at - \frac{1}{4at}\right)x + \boldsymbol{\frac{1}{4a}}
\end{aligned}$$

となり, この直線の $y$ 切片は $t$ には依存しない定数 $\dfrac{1}{4a}$ となることがわかりました。つまり, $t$ がどのような値であっても, 言い換えれば降り注ぐ光線がどこから降り注ごうが, その光は 1 つの定点 $\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ に到達することを意味します。この 1 点のことを, 放物線の**焦点**と言うわけです。

「パラボラアンテナ」は正にこの性質を利用したもので, アンテナの向きを電波が降り注ぐ方向に向けると, パラボラ面に当たったすべての電波が, 焦点の位置に置かれた受信機に降り注ぐことにより, 弱い電波を非常に強い電波として受信していることになります。

---

**注8** 弧度法で $\dfrac{\pi}{2}$ は, 度数法で $90^\circ$。

# 3　面積　～ 2 放物線が同じ方向を向いている場合

さて, 放物線の説明を終えたところでいよいよ本題です。まずは, 表題の通り「2 つの放物線が同じ方向を向いている場合」に, 2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を考えてみます。

そもそも, この場合 2 つの放物線によって囲まれる部分が存在するかどうかが第 1 関門です。

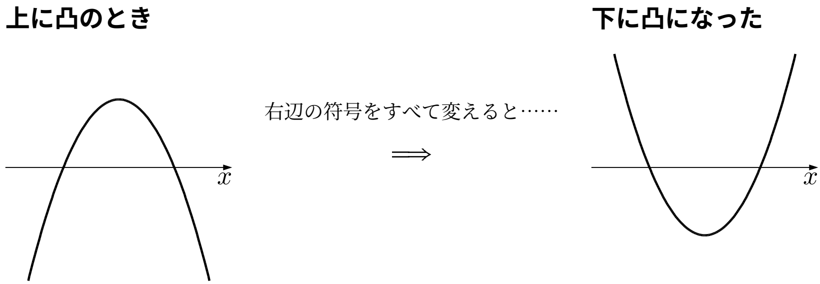
2 つの放物線を

$$C_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1\ ,\quad C_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

とおきます。同じ向きということで, $a_1$ と $a_2$ は同符号, かつ

$$a_1 < a_2$$

とします。上に凸の場合はどうするのか……そう, 右辺のすべての符号を変更して考えれば今回の設定と同じと考えられますから, 今回の設定でのみ考えれば十分満足なのです。




$C_1$ と $C_2$ によって囲まれる部分が存在するということは, $C_1$ と $C_2$ を連立して解いたときに異なる 2 組の実数解をもてばよいので, 連立して $y$ を消去した方程式

$$(a_2 - a_1)x^2 + (b_2 - b_1)x + (c_2 - c_1) = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$[注9]

の判別式 $D$ が $D > 0$ を満たせばよいのです。つまり

$$D = (b_2 - b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) > 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

[注9] この章から数式番号を一旦リセットしています。ご注意ください。

を満たせばよい, ということです。

さて, 以下 2 次方程式 ① が異なる 2 つの実数解をもつときに限って考えます。この 2 つの解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ であるとすると, 解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\ ,\quad \alpha\beta=\frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}\qquad \cdots\cdots③$$

が成り立ちます。

ところで, 区間 $[\alpha,\ \beta]$[注10] の中央にある $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のときの $C_1$ と $C_2$ の上下関係を調べてみます。$C_1$ の方程式の右辺から $C_2$ の方程式の右辺を引いた結果が正になれば $C_1$ の方が上であると判断できます。

$$\begin{aligned}
&\left(a_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+b_1\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+c_1\right)-\left(a_2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+b_2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+c_2\right)\\
&\quad=\frac{a_1-a_2}{4}(\alpha+\beta)^2+\frac{b_1-b_2}{2}(\alpha+\beta)+(c_1-c_2)\\
&\quad=\frac{a_1-a_2}{4}\cdot\frac{(b_2-b_1)^2}{(a_1-a_2)^2}+\frac{b_1-b_2}{2}\cdot\frac{b_1-b_2}{a_2-a_1}+(c_1-c_2)\quad (③\text{ より})\\
&\quad=-\frac{(b_2-b_1)^2}{4(a_2-a_1)}+\frac{(b_1-b_2)^2}{2(a_2-a_1)}+(c_1-c_2)\\
&\quad=\frac{(b_1-b_2)^2}{4(a_2-a_1)}+(c_1-c_2)\\
&\quad=\frac{(b_2-b_1)^2-4(a_2-a_1)(c_2-c_1)}{4(a_2-a_1)}\\
&\quad>0\qquad (\text{分子は ② から正, 分母は条件 } a_1<a_2 \text{ より正})
\end{aligned}$$

つまり, $C_1$ の方が上であることが保証されました。

さて, あとは面積計算のみです。

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta\{(a_1x^2+b_1x+c_1)-(a_2x^2+b_2x+c_2)\}\,\mathrm{d}x\\
&=\left[\frac{a_1-a_2}{3}x^3+\frac{b_1-b_2}{2}x^2+(c_1-c_2)x\right]_\alpha^\beta\\
&=\frac{a_1-a_2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b_1-b_2}{2}(\beta^2-\alpha^2)+(c_1-c_2)(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

---

**注10** $\alpha\leqq x\leqq\beta$ のことです。

$$
\begin{aligned}
&= (\beta-\alpha)\left(\frac{a_1-a_2}{3}\{(\beta+\alpha)^2-\beta\alpha\}+\frac{b_1-b_2}{2}(\beta+\alpha)+(c_1-c_2)\right)\\
&= (\beta-\alpha)\left(\frac{a_1-a_2}{3}\left\{\frac{(b_2-b_1)^2}{(a_2-a_1)^2}-\frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}\right\}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left.+\frac{b_2-b_1}{2}\cdot\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}+(c_1-c_2)\right) \qquad (\text{③ より})\\
&= \frac{\sqrt{D}}{a_2-a_1}\left(\frac{(b_2-b_1)^2}{3(a_1-a_2)}+\frac{c_2-c_1}{3}+\frac{(b_2-b_1)^2}{2(a_2-a_1)}+(c_1-c_2)\right)\\
&= \frac{\sqrt{D}}{a_2-a_1}\cdot\frac{(b_2-b_1)^2-4(a_2-a_1)(c_2-c_1)}{6(a_2-a_1)}\\
&= \boldsymbol{\frac{D\sqrt{D}}{6(a_2-a_1)^2}} \qquad (\text{ただし } D=(b_2-b_1)^2-4(a_2-a_1)(c_2-c_1))
\end{aligned}
$$

以上, 2 放物線によって囲まれる部分の面積は, 意外とキレイな文字式で表されることがわかりました。

とはいえ, そもそも判別式 $D$ が複雑な式なので, 実際にこれを公式化して面積を求めるのは偉く難儀なんですけどね。