2012年全国学力テスト問題より

2012. 6. 3
Written by **ma–.** (caLabo.)

1　はじめに

2012年4月, 文部科学省による全国学力テストが小学校6年生と中学校3年生を対象に行われました。今回は悉皆調査ではなく抽出校と希望校のみの実施となったものの, 双方合わせると小学6年生約89万人, 中学3年生約90万人という凄まじい人数での実施となりました。

ところで, このサイトではこのテストの是非等世間で論議されていることには一切触れるつもりはありません。しかしながら, 公表された問題を見ると少なくとも数学の問題についてはかなり練られており, その筋の人間から見ると狙いがわかりやすい問題が多かったと感じました。作問する方々もえらく苦労していることと思います。私が言う立場ではないことは重々承知しておりますが, どうもお疲れさまでした。

さて, 今回はこの学力テストの中3向けの問題から, 私が気になった問題を紹介します。まずは皆さんも問題にチャレンジしていただき, その背景なども考えてみてください。数学は単に「答えが出ればよろしい」という教科ではないことが理解していただけるものと信じております。

問題は, A問題とB問題に分かれており, 前者が基本的な知識を問う問題, 後者が活用力を問う問題となっています。

2　その1

A問題の $\boxed{2}$ (4) です。

> a を整数とするとき, 式 $2a$ で表すことのできる数を, 次の中からすべて選びなさい。
>
> 0　　1　　35　　78　　100

一見何の変哲のない問題ですが, どうでしょう。おわかりになりますか？

そういえば中 3 の 4 月実施ということで, 問題の程度はすべて中 2 までに学ぶ事柄からの出題となっています。

中 1 で, 初めて負の数を学びます。そこで, 自然数と整数ということを学ぶわけですが, 最初のうちはこの用語, 特に前者についてゼロが入るかどうかなかなか覚えられない生徒が多いものです。この混乱から, 今回の問題もゼロを除いてしまう生徒もいるのかな, と思います。

また, そもそも整数だの自然数だの細かいことは置いておいて, という生徒が多いのも事実。「答えさえ求められれば良いじゃん」と考える生徒にとっては, 些細なことでしょう。ですから, そもそも問題の意味すらわからず「全部 OK では？」と感じる生徒もいることでしょう。そう, 何も考えなければ, 35 は 2×17.5 ですからね。

このような細かなことから, 文字による式の説明という論理的思考力の部分に踏み込むことになります。数学の本来の姿は, こちらの方です。

正解： 0, 78, 100

3　その 2

A 問題 $\boxed{2}$ (3) です。

一次方程式　$7x = 4x + 6$　を次のように解きました。

$$
\begin{aligned}
7x &= 4x + 6 \\
7x - 4x &= 6 \\
3x &= 6 \qquad \cdots\cdots ① \\
x &= 2 \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

上の①の式から②の式へ変形してよい理由として正しいものを, 下の **ア** から **エ** までの中から 1 つ選びなさい。

ア　①の式の両辺に 3 をたしても等式は成り立つから, 変形してよい。
イ　①の式の両辺から 3 をひいても等式は成り立つから, 変形してよい。
ウ　①の式の両辺に 3 をかけても等式は成り立つから, 変形してよい。

エ　①の式の両辺を 3 でわっても等式は成り立つから, 変形してよい。

等式の変形の基本的な問題です。この方程式が与えられたときに自力で解けるかというと, ほぼ 100% 近い生徒が解くことができるはずです。しかし, 1 行 1 行の過程をこのように説明できるかというと, 意外と怪しいものです。

今回の場合, 特に **ウ** と間違える生徒がいるのではないかと推測します（もちろん 10% 程度でしょうけど)。原因と結果を逆転させてしまう間違えはよくあることです。

良くを言えば, 計算過程の 1 行目から 2 行目の「移項」の部分について同じ質問をしてみて欲しかった。「えっ？　移行って符号を変えて反対側にやるだけじゃないの？」とパターン化して覚えてしまっている生徒がかない多いと思われるので, 確かにこのように選択肢を与えられると正解率は高まるのでしょうが, 今回の移項を「両辺から $4x$ を引いた」と正しく認識している生徒はかなり少ないのではないでしょうか。

正解：エ

4　その 3

A 問題 $\boxed{2}$ (4) です。

次の問題について考えます。

問題

家から 1800 m 離れた駅に向かって, 妹が家を出発しました。兄が妹の忘れ物に気づいて, 妹が出発してから 15 分後に, 同じ道を自転車で追いかけました。

妹は分速 70 m, 兄は分速 220 m で進むとすると, 兄が妹に追いつくのは兄が出発してから何分後ですか。

この問題は, 方程式を使って次のように解くことができます。

解答

兄が出発してから x 分後に妹に追いつくとすると,

(1) 妹に追いつくまでに兄が自転車で進む道のりは $220x$ m。兄に追いつかれるまでに妹がすすむ道のりは $70(15+x)$ m と表すことができる。

これらの道のりは等しいので,

$$220x = 70(15+x)$$

この方程式を解くと,

$$220x = 1050 + 70x$$
$$150x = 1050$$
$$x = 7$$

$x = 7$ のとき, つくった方程式の左辺と右辺の値は 1540 となり等しいので, $x = 7$ は方程式の解である。

(2) 兄が出発してから 7 分後までに兄と妹が進む道のり 1540 m は, 家から駅の道のり 1800 m とり短いから, 兄は妹が駅に着く前に追いつくことができる。

よって, 兄が妹に追いつくのは兄が出発してから 7 分後である。

答　7 分後

解答 で, $\boxed{}$ の (1) の部分では, 問題の中の数量を, 文字を用いた式で表しています。

解答 の $\boxed{}$ の (2) の部分では, あることがらを調べています。そのことがらについて正しく述べたものを, 下の **ア** から **エ** までの中から 1 つ選びなさい。

ア　方程式が, 等しい関係にある数量を用いてつくられているかどうかを調べている。

イ　方程式から得られた値がその方程式の解であるかどうかを, その方程式の両辺にその値を代入して調べている。

ウ　方程式の解を問題の答えとしてよいかどうかを調べている。

エ　つくった方程式を, 等式の性質などを用いて正しく解いているかどうかを調べている。

これも, 方程式を解くという単純な作業のみならず, 方程式をどう利用するかという具体例を細かく問う良問です。破線枠 (2) の直上に選択肢 **イ** に相当する部分もあるためひっかかる生徒もいるでしょうが, 概ね正解はできるでしょう。

ただし, このように選択を与えられていない場合, 殆どの生徒は「解の吟味」など行わないのではないでしょうか。2 次方程式のように解が複数ある場合は吟味するけど……とか, 負の解があれば吟味するけど……といった生徒は多くいそうです。

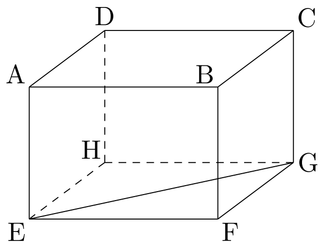
もちろん, 数学的には方程式を作った時点で論理的に吟味不要な方程式になっている場合も多くあるわけですが, 中学生のレベルだとそこまで考えていられないでしょういから, いちいち吟味するのが正解だと思います。

正解：ウ

5　その 4

A 問題の [5](1) です。

右の図のような直方体があります。EG は長方形 EFGH の対角線です。このとき, ∠AEG の大きさについてどのようなことがいえますか。下の **ア** から **エ** までの中から正しいものを 1 つ選びなさい。



ア　∠AEG の大きさは, 90° より大きい。

イ　∠AEG の大きさは, 90° より小さい。

ウ　∠AEG の大きさは, 90° である。

エ　∠AEG の大きさが 90° より大きいか小さいかは, 問題の条件だけでは決まらない。

まぁ大体の生徒は正解できるだろう問題ですが, 空間把握能力の基礎を問う良問ではないかと思います。$\angle$AEF が直角であることは即座にわかるでしょうが, 底面に含まれる直線と直線 AE とは常に垂直になるということは, 言われればわかるものの, 空間図形を平面に描いた図を見ただけではなかなか理解できない生徒も多いと思います。つまり, $\angle$AEF に比べて $\angle$AEG は「見た目」小さく見えるわけです。

$\angle$AEG を構成する 2 辺 AE, EG を含む面（長方形）AEGC に着目させる, 面（長方形）AEGC を直方体の切断面として把握させる, など様々な手法があるでしょうが, とにかく空間図形内に潜む平面図形についてしっかりと把握できるよう指導したいものです。

正解：ウ

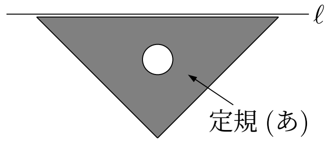
ちなみに, 同じ $\boxed{5}$ の (3) も, 三角柱の展開図を選ばせる問題で, なかなか良問でした。ここでは省略しますが, 興味のある方は文部科学省のページで閲覧してみてください。

6　その 5

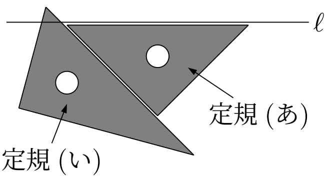
それよりも更に良問だと思われる問題が, $\boxed{6}$ (1) です。

下の (1), (2), (3) の手順で, 直線 ℓ に平行な直線 m をひきます。

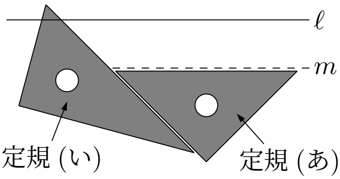
(1) 直線 ℓ に合わせて, 定規 (あ) を置く。



(2) 定規 (あ) に合わせて, 定規 (い) を置く。



(3) 定規 (い) を動かさずに, 定規 (あ) を定規 (い) に沿って動かし, 直線 m をひく。



上の (1), (2), (3) の手順では, 直線 ℓ に対する平行な直線 m を, どのようなことがらを根拠にしてひいていますか。下の **ア** から **エ** までの中から正しいものを 1 つ選びなさい。

ア 2 直線に 1 つの直線が交わるとき, 同位角が等しければ, 2 直線は平行である。

イ 2 直線に 1 つの直線が交わるとき, 錯角が等しければ, 2 直線は平行である。

ウ 1 つの直線に垂直な 2 直線は平行である。

エ 1 つの直線に平行な 2 直線は平行である。

これは, 意外と正解がわからない生徒も多かったのではないでしょうか。

そもそも, 当たり前の話ですが, すべての選択肢について文面だけ見ると当たり前のことが書かれています。問題は, この作図で利用しているのはどれか, ということですから, 同位角だの錯角だの直角だのを探さなければなりません。ポイントは, 定規 (あ) について移動前と移動後をじっくり見比べることなのでしょうかね。どうなんでしょう。

いずれせよ, 問題（作業）の本質を付いた良問かと思います。

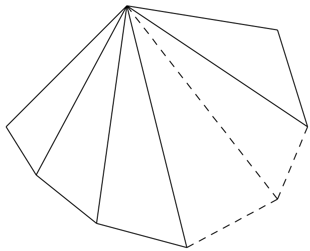
正解：ア

※ 定規 (あ) の左側の 45° が上から下にスライドしている（同位角）のです。

7　その 6

次の問題, $\boxed{6}$ (2) です。

下の図のように, n 角形は 1 つの頂点からひいた対角線によって, いくつかの三角形に分けられます。



このことから, n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n-2)$ で表すことができます。

この式の $(n-2)$ は, n 角形において何を表していますか。下の **ア** から **オ** までの中から正しいものを 1 つ選びなさい。

ア 頂点の数
イ 辺の数
ウ 内角の数
エ 1 つの頂点からひいた対角線の数
オ 1 つの頂点からひいた対角線によって分けられた三角形の数

これまた, 問題の本質を突いた問題ですね。学力テストはどうやらこのような問題を多数取り入れ, 単に「答えを出す」数学からの脱却を狙っているのかな, とも思えてきます。

この問題は解説不要ですよね？

正解：オ

図形分野の問題の紹介はもうやめにしますが, 証明問題の関連問題である $\boxed{8}$ もかなりの良問でした。証明することの本質を問題にしています。こちらも, 興味のある方は是非とも文部科学省のページをご覧になってみてください。

とにかく, 図形分野はここに紹介し切れないほど良問揃いだと思います。

「文部科学省のページを……」などと投げやりとも思える部分が出てきてしまって申し訳ありませんでした。

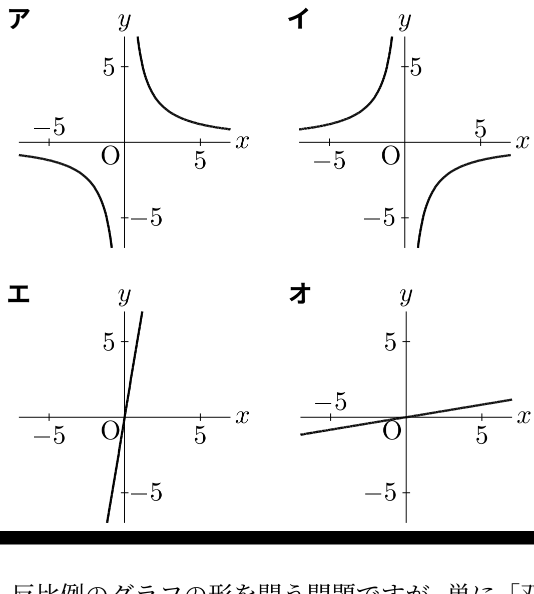
8　その 7

今回は私が気になった関数, そして確率の問題を紹介したいと思います。まずは皆さんも問題にチャレンジしていただき, その背景なども考えてみてください。

なお, 問題には資料の整理の分野も含まれていますが, 紹介する問題はありません。

まずは, A 問題 $\boxed{10}$ (2) です。

下の **ア** から **オ** までの中に, 反比例 $y = \dfrac{6}{x}$ のグラフがあります。正しいものを 1 つ選びなさい



反比例のグラフの形を問う問題ですが, 単に「双曲線」というイメージだけではなく漸近線の有無まで考えなければいけない問題となっています。中学生だと漸近線という言葉そのものは学習しませんから, とにかく軸に触れない, つまり $x = 0$ や $y = 0$ という値を取ることはないという事実を知らなけれ

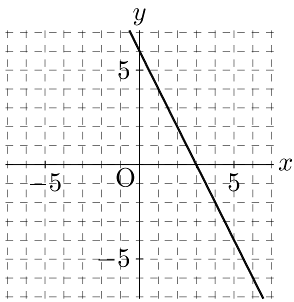
ばならない問題です。

解答：ア

9　その8

次は, A 問題の $\boxed{13}$ です。

次の図の直線は, 二元一次方程式 $2x + y = 6$ のグラフを表しています。このとき, この方程式の解である x, y の値の組を座標とする点について, 下の **ア** から **オ** の中から正しいものを 1 つ選びなさい。



ア　解である x, y の値の組を座標とする点はない。
イ　解である x, y の値の組を座標とする点は 1 つだけである。
ウ　解である x, y の値の組を座標とする点は 2 つだけである。
エ　解である x, y の値の組を座標とする点は無数にあり, その x, y の値は整数である。
オ　解である x, y の値の組を座標とする点は無数にあり, その x, y の値は整数であるとは限らない。

これは方程式とグラフの関連について問う問題ですが, 中学生でどの程度この関係が認識出来ているのかはまったくわかりません。正直, 高校生であっても, 例えば 2 つのグラフの交点がそれら 2 つのグラフを表した方程式を連立させて解いたときの解になる, という「ズバリ」なことはわかっていても, 曲線そのものがその方程式を満たす x, y の組そのものの集合体であるという認識

をしている者がどれほどいるのか, 心配でなりません。

解答：オ

10　**その** 9

$\boxed{14}$ の (1), 確率の問題です。

表と裏の出方が同様に確からしい硬貨があります。この硬貨を続けて投げたところ, はじめから 3 回続けて表が出ました。さらにもう 1 回投げて, 4 回目の表と裏の出方を調べます。4 回目の表と裏の出る確率について, 下の **ア** から **エ** までの中から正しいものを 1 つ選びなさい。

ア　表の出る確率の方が裏の出る確率よりも大きい。
イ　表の出る確率の方が裏の出る確率よりも小さい。
ウ　表の出る確率を裏の出る確率は等しい。
エ　表の出る確率と裏の出る確率の大小は決まらない。

この問題の意図するところはおわかりでしょうか？

3 回連続して表が出ると, そろそろ裏が出るのではないか。4 回も連続して表が出るなんて, そんな確率低いよ！　実際, 4 回連続して表が出る確率は実に $\dfrac{1}{16}$ なわけですから, 思わず **イ** を選んでしまいたくなる問題です。

しかし, もちろんそれは間違いです。4 回連続表が出る確率が $\dfrac{1}{16}$ というのは, 「まだ 1 回も投げていない状態」からの確率であり, 「既に 3 回投げてしまった」後では, やはり次の「たったの 1 回」の確率を求めているに過ぎないので, それが例え何回目であろうと表の出る確率と裏の出る確率は同じであるはずです。

確率に対する感覚は, 例えばゲームなどでもその感覚が備わっていればいるほど勝率も上がるでしょうし, 今流行の SNS ゲームなどで大枚をはたいて大損するなんてこともないはずですから, しっかり勉強してその感覚を身に付けておきたいものです。

正解：ウ

11　その10

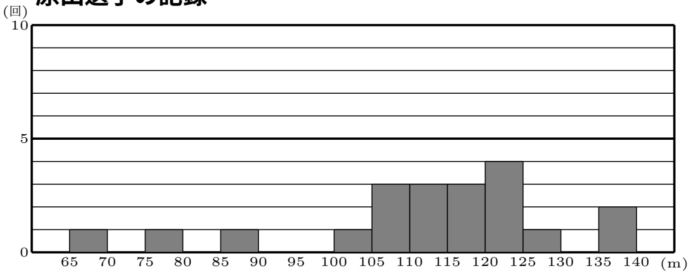
ここからは, それこそ「頭を使う問題」である B 問題の紹介に移りたいと思います。

今回は $\boxed{3}$ の問題です。

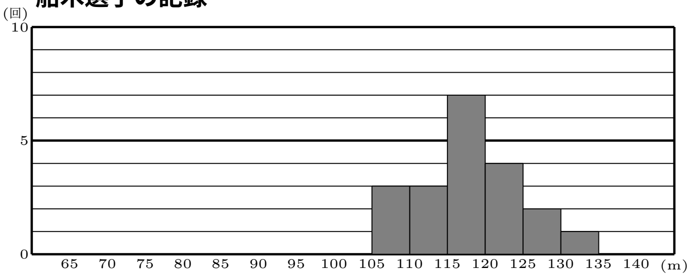
1998 年生まれの美咲さんは, この年に行われた長野オリンピックで日本チームが金メダルをとったスキージャンプ競技に興味を持ちました。この競技では, 飛んだ距離の大きさと姿勢の美しさを競います。

美咲さんは, このときの日本チームの原田雅彦選手と船木和喜選手[注1]の飛んだ距離の記録について調べました。下の 2 つのヒストグラムは, 1998 年シーズンの長野オリンピックまでのいくつかの国際大会で, 二人が飛んだ距離の記録をまとめたものです。たとえば, このヒストグラムから, 二人とも 105 m 以上 110 m 未満の距離を 3 回飛んだことが分かります。

原田選手の記録



船木選手の記録



次の (1), (2) の各問いに答えなさい。

(1) 前ページの二人のヒストグラムから, 原田選手と船木選手の飛んだ回数が同じであることがわかります。その回数を求めなさい。

(2) 美咲さんは, もしこの二人がもう 1 回ずつ飛んだとしたら, どちらの選手がより遠くへ飛びそうかを, 二人のヒストグラムをもとに考えてみたいと思いました。

　二人のヒストグラムを比較して, そこから分かる特徴をもとに, 次の 1 回でより遠くへ飛びそうな選手を一人選ぶとすると, あなたならどちらの選手を選びますか。下の **ア**, **イ** の中からどちらか一方の選手を選びなさい。また, その選手を選んだ理由を, **二人のヒストグラムの特徴を比較して** 説明しなさい。どちらの選手を選んで説明してもかまいません。

ア　原田選手

イ　船木選手

そういや一時期, 大学入試, 特に AO 入試やら推薦入試やら面接の口頭試問やらで, この手の問題が流行りました。つまり, 正解は決まっておらず, 自分の考えを論理的思考を元に述べるというまさに「思考力」を問う問題です。

当然, 解答は **ア**, **イ** いずれでも良いのですが, 果たして中学 3 年生がこの出題意図を汲み取ることができるのか。その時点で思考力が問われているとも言えるでしょう。つまり, 「どちらが正解なの？」と思うこと自体が間違いなのですから。

ちなみに, 文部科学省が公表している解答例は次のようになっています。

解答：ア

説明例：原田選手の記録の方が船木選手の記録より 130m 以上の階級の累積度数が大きいので, 原田選手の方が次の 1 回でより遠くへ飛べそうな選手である。だから, 原田選手を選ぶ。

しかしもちろん, **イ** を選んでも良いのです。この場合, 当然のように記録の安定性を持ち出すことになるでしょう。例えば平均値を用いる方法が考えら

注1 問題中の写真と挿絵は省略してあります。

れます。計算はかなり大変ですが, 度数分布表を書いて 2 人の記録の平均値を求めると, 原田選手は 112 m, 船木選手は 118 m となります。中学生では学ばないものの中央値を用いる方法を考えられます。この場合, 原田選手は 112.5 m, もしくは 117.5 m（中央値が 2 つある）, 船木選手は 117.5 m です。

いずれにせよ, 第三者を納得させることができるのか。まさに今の若者に足りないと思われる能力を問う問題となっています。

どうせなら, **ア** とするとどう説明しますか, **イ** とするとどう説明しますか, と両方の立場に立った説明をさせる問題として出題しても良かったかも知れませんね。

12　**その** 11

$\boxed{6}$ です[注2]。

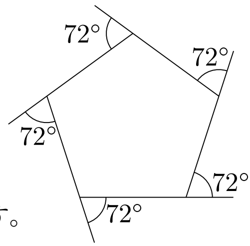
涼太さんと七海さんは, 多角形の外角の和が 360° であることをもとに, 正多角形の 1 つの外角の大きさについて調べています。

涼太さんは, まず正五角形の 1 つの外角の大きさを次のように求めました。

正五角形の外角の大きさはどれも等しいから, 正五角形の 1 つの外角の大きさは, 外角の和 360° を頂点の数 5 でわって求められます。

$$360^\circ \div 5 = 72^\circ$$

だから, 正五角形の 1 つの外角の大きさは 72° です。



七海さんは, 正五角形以外の正多角形でも, 同じように 1 つの外角の大きさを求められることに気付きました。

たとえば正三角形のときは, 頂点の数が 3 だから, 外角の和 360° を 3 でわって, 1 つの外角の大きさを 120° と求められるね。

次の (1) から (3) までの各問いに答えなさい。

[注2] 問題文中の挿絵は省略しています。

(1) 正十二角形の 1 つの外角の大きさを求めなさい。

(2) 正多角形の 1 つの外角の大きさについて,「**正多角形の頂点の数を決めると, それにともなって正多角形の 1 つの外角の大きさがただ 1 つ決まる**」という関係があることが分かります。

下線部を, 次のように表すとき, ① と ② に当てはまる言葉を書きなさい。

① は ② の関数である。

(3) 涼太さんと七海さんは, 正多角形の頂点の数と 1 つの外角の大きさの間にある関係がどのような関数であるかを調べるために, 分かったことを次のようにまとめました。

まとめ

◎ 頂点の数がいくつでも, 外角の和は 360° で一定である。

◎ 1 つの外角の大きさはすべて等しい。

だから, 正多角形の 1 つの外角の大きさは, 正多角形の外角の和を頂点の数でわることによって求められる。

正多角形の頂点の数が x のときの 1 つの外角の大きさを $y°$ とします。このとき, 上の **まとめ** から, x と y の間にある関係はどのような関数であるといえますか。下の **ア** から **ウ** までの中から正しいものを 1 つ選びなさい。また, それが正しいことの理由を説明しなさい。

ア 比例

イ 反比例

ウ 比例ではない一次関数

これも, 単に 1 つの外角を求めるだけならノーヒントでもかなり正答率は高いだろうと思われる問題ですが, そこにしっかりとした根拠や思考がともなっているかを問う良問だと思います。

(1) は基本問題です。しかも文中に求めたがしっかり書かれているため, 求め方を知らなかったという生徒でも答えることが可能です。

(2) は A 問題でも良いだろうと思われる基本問題。しかし, 中学生が「関数」

を厳密に考えながら普段関数の問題を解いているとは到底思えないですし，しかも「関数」ではない図形の方程式（高校数学Ⅱで学びます）を学ぶ前であると言うことも災いし，「一体この問題は何を言っているのか」がわからない生徒も多かったのではないでしょうか。しかも，関数には「方向」がある。単に「頂点の数」と「1 つの外角の大きさ」の関係があることにとどまらず，どちらがどちらに依存して決まっているかという方向性にまでしっかり考えを及ばせなければならないわけですから，基本中の基本（ある意味「定義」そのもの）ではあるものの予想以上に出来は悪かったのではないかと想像します。

(3) は，その「関数」の種類を問う問題としては基本中の基本です。式の形からすぐにわかることでしょう。しかしその理由を説明しなさい，となるとパッタリと鉛筆が止まってしまった生徒が多かったのではないでしょうか。それもこれも，「証明と言えば図形の合同と相似」のような「証明問題」の学び方をしている中学生の不幸と言えます。「証明」はある意味「説明」なのですが，例えばしっかりと日本語で原稿用紙に説明するかのような「学び」が足りないので，「数学での証明」＝「あくまでも根拠を 2〜3 箇条書きで挙げて」のような，日本語としての「説明」とは別物として捉えている生徒が多いのです。このことについては，中学数学で「証明」の学び方を根底から変える必要があるのではないかと筆者は考えています。つまり，図形の分野で出てくる合同や相似の証明などは極端に言うとゼロにしても良いので，例えば展開の公式 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ が成り立つ理由を説明せよ，などというごく簡単なものからしっかりとやらせ，他人に説明するとはどういうことかという根底からしっかりと教える必要があると思うのです。

合同や相似の証明の弊害は，一言で言うと「数学的な条件」を考え（ここでは合同条件や相似条件），その条件を揃えるという作業に終始しているという点です。実際の証明は，数学的な条件はさほど考慮しなくても単純に国語的な「説明」が可能な問題も多数あるわけです。そういった，「作業」ではなく「本来的な説明」の重要性をしっかりと教えたいものです。

正解：　(1)　30°

(2)　$\boxed{①}$ 正多角形の 1 つの外角の大きさ

　　$\boxed{②}$ 正多角形の頂点の数

(3) （解答例）正多角形の外角の和は $360°$ で一定であり, 1 つの外角の大きさはすべて等しいので, x と y の関係を式で表すと $y = \dfrac{360}{x}$ となる。この式は, $y = \dfrac{a}{x}$ の形をしているので, y は x に反比例する。

13 さいごに

2012 年全国学力テスト問題中 3 数学の問題を紹介してきましたが, いかがでしたか。きっと, 今まさに中学生だという方にとっても, 昔中学校で数学を学んだという方にとっても, 学校出学んだ, 或いは出題された問題とはひと味違った問題が多数出題され, それら問題 1 つ 1 つに密かに教育に対するメッセージが込められているということがおわかりいただけたのではないかと思います。

学校のテストだってきっとそうです。単に成績の違いをつけるためだけにテストをやっているわけではありません。同じ方程式の問題でも, 係数が 1 異なれば解き味（解く過程）もかなり変化し, その数字にした理由についてもそれなりの意図があったりもするものです。

そういったことまで少しでも考えながら数学に触れると, それはそれでまた違った数学の面白さや奥深さがわかってくるのではないかと思うのですが, どうでしょうか。