フィボナチ数列

2013. 8.25
Written by **ma–.** (caLabo.)

1　階段上りの問題

ある人が, 15 段ある階段を上ろうと思います。上り方は「次の段に上る」か「1 段飛ばして上る」の 2 通りをその都度選べるものとすると, ちょうど 15 段を上り切るまでの登り方は何通りあるか。

これは, とても有名な問題ですから, ご存じの方も多いでしょう。フジテレビで放送中[注1]の「たけしのコマ大数学科」の栄えある第 1 回の問題もこの問題でした。

さて, 皆さんはこの問題を解くことができますか？

この問題のポイントは, 現在何段目にいても同じ問題を考えることによって解くことができる, という点にあります。

ちょっと意味がわからないですよね。つまり……

スタート地点を「0 段目」としましょう。

最初に「次の段に上る」を選択すると, 残りは 14 段。つまりここから「14 段の階段を同じ条件で上る方法は何通りか」の答えの分だけ上り方がある, ということになります。

最初に「1 段飛ばして上る」を選択すると, 残りは 13 段。今度は, ここから「13 段の階段を同じ条件で上る方法は何通りか」の答えの分だけ上り方がある, ということになります。

スタート地点である「0 段目」に戻ると, ここから最初の選択肢は「次の段に上る」か「1 段飛ばして上る」のいずれかであり, 上った先からゴールまでの上り方はそれぞれ「14 段の階段を同じ条件で上る方法」と「13 段の階段を同じ条件で上る方法」ですから, 最初（0 段目）からゴールである 15 段目まで上る方法はその両者の和に等しいということになります。

n 段ある階段を上る方法を $f(n)$ 通りとします。今回求めたいのは $f(15)$

[注1] 2014 年初頭に放送は終了しました。

ということになります。今わかったことを式にすると

$$f(15) = f(14) + f(13)$$

となります。

同じように考えると

$$\begin{aligned} f(14) &= f(13) + f(12) \\ f(13) &= f(12) + f(11) \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(n+2) &= f(n+1) + f(n) \end{aligned}$$

となることがわかります。最後の n を使った式を**漸化式**と呼びます。

この漸化式を元に数列を作ってみましょう。

ただし, 最初の $f(2)$ と $f(1)$ だけは, $f(0)$ なんてものは存在しないのでこの漸化式で求めることができません。よってこれを使わずに求める必要がある……つまり既知の数となっていなければなりません。このような値を**初期値**もしくは**初期条件**と呼びます。初期値が異なれば, いくら漸化式が同じであっても数列そのものが変わってしまいます。

まずは $f(1)$ を求めてみましょう。これは簡単です。階段が 1 段しかないということは「1 段飛ばして上る」ことは不可能ですから, 「次の段に上る」の 1 通りしか上り方はありません。つまり

$$f(1) = 1$$

です。

次に $f(2)$ を求めてみましょう。今度は階段が 2 段ありますから, いきなり「1 段飛ばして上る」を選択すると終わってしまいます。これで 1 通り。次に, 最初に「次の段に上る」を選択すると, そこからは「残り 1 段」ですから, つまり $f(1)$ に等しい方法で上ることができます。つまりこの場合も 1 通り。よって

$$f(2) = 2$$

です。

今の $f(2)=2$ という結果は, 2 という数字は「2」と表す方法と「$1+1$」で表す方法の 2 通りありますよ, ということを意味しています。意味がわからない？　つまり「次の段に上る」が 1, 「1 段飛ばして上る」が 2 なわけで, 「2」は「1 段飛ばして上りました」ということを, 「$1+1$」は「次の段に上るを 2 回行った」ことを表しているという寸法です。こう考えると, 冒頭の問題は

> 15 を, 1 と 2 だけを複数回加えるという式で表す方法は何通りあるか。

と書き換えることができることもわかります。

さて本題に戻って, ここからは漸化式の出番です。一気にやってしまいましょうか！

$$
\begin{aligned}
f(3) &= f(2)+f(1) = 2+1 = 3\\
f(4) &= f(3)+f(2) = 3+2 = 5\\
f(5) &= f(4)+f(3) = 5+3 = 8\\
f(6) &= f(5)+f(4) = 8+5 = 13\\
f(7) &= f(6)+f(5) = 13+8 = 21\\
f(8) &= f(7)+f(6) = 21+13 = 34\\
f(9) &= f(8)+f(7) = 34+21 = 55\\
f(10) &= f(9)+f(8) = 55+34 = 89\\
f(11) &= f(10)+f(9) = 89+55 = 144\\
f(12) &= f(11)+f(10) = 144+89 = 233\\
f(13) &= f(12)+f(11) = 233+144 = 377\\
f(14) &= f(13)+f(12) = 377+233 = 610\\
f(15) &= f(14)+f(13) = 610+377 = 987
\end{aligned}
$$

……ふぅ。ようやく答えができました。冒頭の問題「15 段の階段の上り方」は「987 通り」と求められました。

疲れましたが, 実は大した計算量ではありませんね。

2　フィボナチ数列とリュカ数列

さて, ようやくタイトルのフィボナチ数列です。

今と同様に, 漸化式が

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

で表され, かつ初期値が

$$a_1 = 1\ ,\quad a_2 = 1$$

の場合を, **フィボナチ数列**と呼びます。

ちなみに, 漸化式はそのままで, 初期値のみ

$$a_1 = 1\ ,\quad a_2 = 3$$

と変更したときにできる数列を**リュカ数列**と呼びます。

フィボナチ数列とリュカ数列を準備並べて書いてみると

$$\begin{array}{l} 1, 1, 2, 3, \ \ 5, \ \ 8, 13, 21, 34, \ \ 55, \ \ 89, 144, 233, 377, \ \ 610, \cdots\cdots \\ 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, \cdots\cdots \end{array}$$

と, 漸化式が同じであるにもかかわらずまったく違った数列となることがわかります。

これらの数列の凄い (?) ところは, 漸化式などという難しい言葉や概念を知らなくても, 一度この数列の作り方を知ってしまえば小学生にでも簡単に作ることができる数列であるということです。

しかし, 漸化式で表された数列全般に言えることですが, これらの数列の大きな問題点は, いきなり「100 番目の数は？」と聞かれても即答できないことです。

数列の世界では, この「n 番目の数」のことを「第 n 項」と呼びます。そして, 第 n 項を表した n を用いた数式のことを**一般項**と呼びます。今述べた問題点を専門用語を用いて述べると, フィボナチ数列やリュカ数列は一般項がわかりずらい, ということになります。

では次回。難しいとはいえ, 求める方法は存在しますから, 実際にフィボナチ数列の一般項を求めてみることにしましょう。