エセ!? 正五角形の作図法

2013. 5.29
Written by ***ma–.*** (`caLabo.`)

1 はじめに

ある日のこと。私はとある友人 (教員) から 1 本の電話をもらいました。

「トゥルルル……, トゥルルル……」

電話を取ると, 受け持っている生徒 (中学生) が謎の正五角形の作図をやってきたので, こんなんで良いのか検証して欲しいと言います。久々の電話で何てことを……と思ったことは確かなんですが, 詳しく話を聞いてみました。まぁ正式な正五角形の作図法があるのだから, これから逸脱していれば当然「間違え!」ということで終了なんですが, 定規で長さを測ってみてもかなり正確だと言います。まぁ正式な方法を用いても鉛筆の芯やら中心のズレなどから誤差が出るんで, 多少 (1mm 程度のオーダーで) 長さが違っても「間違え」なのか「誤差」なのか計り知れない, ということもあるでしょう。

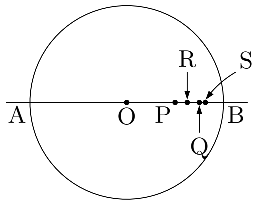
仕方ないので, やってみましたよオッカサン。では早速, 行ってみましょう。

2 エセ? 正五角形の作図法

その方法というのは, 次の通り。

【手順 1】

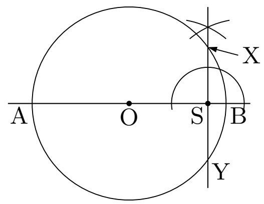
円 O があり, その直径を AB とする。
線分 OB(半径) の中点を作図して, その点を P とする。
線分 PB の中点を作図して, その点を Q とする。
線分 PQ の中点を作図して, その点を R とする。
線分 RB の中点を作図して, その点を S とする。[注1]



[注1] 都合, 点 S は線分 OB を 13 : 3 に内分した点となる。図中では作図の線は省略しているが, 実際にはこの時点でめちゃくちゃゴチャゴチャする。

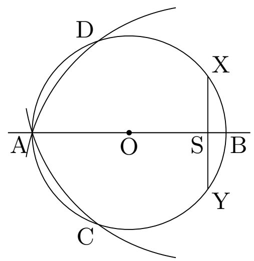
【手順 2】

S を通る直径 AB の垂線を作図し, この垂線と円 O との交点を X, Y とする。



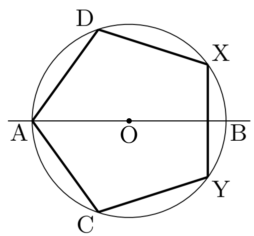
【手順 3】

X を中心として半径 XA の円弧を描き, 点 A 以外の円 O との交点を C とする。
同様に, Y を中心として得られる交点を D とする。



【手順 4】

5 点 A, C, Y, X, D を結ぶ多角形は正五角形!?



最初の【手順 1】が相当な怪しさを醸し出しています。いかにも若さ爆裂, 中学生やね〜という感じの作図。素晴らしいです。

しかし, これを甘く見てはいけません。実際にやってみればわかりますが, 半径を色々変えて何度試しても, この方法で充分**正**五角形に見えちゃうんです。中学生が「これで正解でしょ!」と思うのもごもっともなハナシ。

私も幾つか描いてみましたよ。もっとも途中から (というかエセ正五角形 2 個目の検証から早速), 【手順 1】が相当面倒だってことでココだけは定規で長さを測って 13 : 3 となる点 S をとることにしちゃいましたが (笑), それでも見た目にはホントにホント, 相当な正確さ。私, 三十半ばにして視力両目 2.0

ですヨ！　あ, あまり関係ないですか, あぁそうですか。

さて困りました。実際「正式な」作図法と違う以上間違ってることは確かなんですが, これは正式に誤差の測定をするしかないようです。というわけで, 友人のためこの生徒のため (になるのかは不明なんですが), 実際にやってみましたよ!

とその前に……

3　13 : 3 の作図法

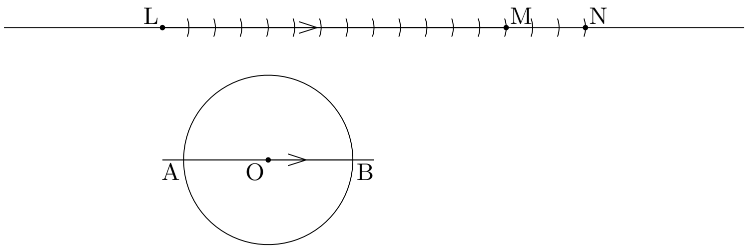
【手順 1】にあるかなり面倒な 13 : 3 の作図ですが, 何も中点の作図を 4 回繰り返すまでもなく作図する方法があるので紹介しておきます。いや, この元となった生徒が中点 4 回やってたんで上ではそのようにしておいたんですけどね。

これは, 実際には「拡大・縮小」と呼ばれる基本的な作図の 1 つを利用するだけなのですが, どうも中学校では「垂線」と「垂直二等分線」, 「角の二等分線」の作図に偏っていて, この方法は意外と知らない方が多いのではないでしょうか。

ここでは本題からちょっと脱線しますが, 任意の $m : n$ の内分点 (外分点も同様) の作図方法を紹介します。以下の作図では, 今回の本題の状況に合わせて 13 : 3 の作図を例にしてあります。

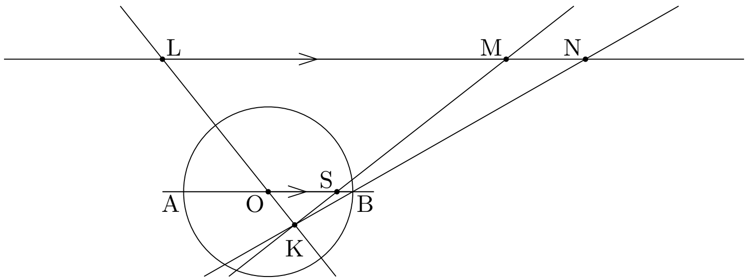
【手順 1】線分 OB と重ならない OB と平行な直線を引き, この直線上に 3 点 L, M, N を 13 : 3 になるようにとる。

細かく説明すると, まず平行の作図は三角定木 2 枚によるか, もしくは垂直の作図を 2 回行う。比 1 に対する幅をコンパスで任意に決め, 直線上にこの長さを連続的に 16 個取る。最初に針を刺した点が L, 13 個目の弧と直線との交点が M, 最後の弧と直線との交点が N である。下図でおわかりだろうか?



【手順 2】直線 LO と直線 NB を引き, その交点を K とする。

さらに直線 KM を引き, 線分 OB との交点が, 線分 OB を 13 : 3 に内分する点 S である。



もうおわかりでしょう？　拡大・縮小の作図は, 要するに平行線と線分の比 (三角形の相似) を利用したものなのです。拡大・縮小の中心 (特異点?)—上記例の場合は点 K—さえわかれば, どんな多角形の拡大・縮小も可能。さらに, 拡大・縮小の中心と平行線の間隔を調整することによって, 拡大率・縮小率も自分で決定することも可能です。

余談。よく間違われることなので, しつこいようですが書いておきます。実現不可能なことで有名な作図に「角の三等分線」がありますが,「辺の三等分」はこの方法で可能だということです。

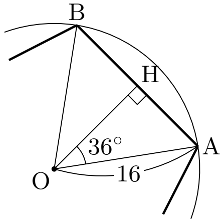
4　円に内接する正五角形の一辺の長さ

さて, 誤差を測定するということは, 正しい長さを知っていなければいけないということです。そこでここでは, まず半径 16 の円に内接する正五角形の一辺の長さを求めてみることにしましょう。半径を 16 にしているのは, 後に

「エセ正五角形の誤差の測定」を行うときに半径を 16 とおくのでこれに合わせたものです。

なお, この章のみ高校数学 I の三角比を多用しています。また高校数学 II の三角関数の内容も一部使っています。

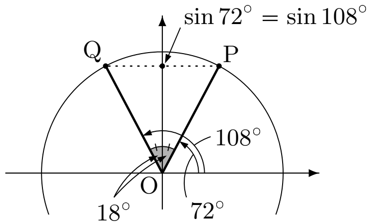
右図を見てください。正五角形の一部のみ表示しています。AB の長さが, 半径 16 の円の内接する正五角形の一辺の長さとなりますが, この長さは直角三角形 OAH を利用すると簡単です。ただし, ここで $\sin 36^\circ$ の値が必要となります。



(1) $\cos 36^\circ$ を求める

この部分だけ, 高校数学 II の三角関数の知識を使います。

108° と 72° は, それぞれ 90° に 18° を足したり引いたりした角なので, $\sin 108^\circ$ の値と $\sin 72^\circ$ の値は等しくなります。単位円で説明すると, 右図のようになります。これより,



$$\sin 108^\circ = \sin 72^\circ$$

$$\sin(3 \times 36^\circ) = \sin(2 \times 36^\circ)$$

$$3\sin 36^\circ - 4\sin^3 36^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \text{注2}$$

$$3 - 4\sin^2 36^\circ = 2\cos 36^\circ \text{注3}$$

$$3 - 4(1 - \cos^2 36^\circ) = 2\cos 36^\circ \text{注4}$$

$$4\cos^2 36^\circ - 2\cos 36^\circ - 1 = 0$$

となり, $\cos 36^\circ$ に関するこの 2 次方程式を解いて,

$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \left(\cos 36^\circ > 0 \text{ より}, \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ は不適。}\right)$$

と求めることができます。

注2 左辺は 3 倍角, 右辺は倍角の公式を適用しています。

注3 $\sin 36^\circ \neq 0$ なので, 両辺これで割りました。

注4 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を代入しました。

(2) $\sin 36^\circ$ を求める

これは言うまでもなく, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ の公式を用います。

$$\begin{aligned}\sin^2 36^\circ &= 1 - \cos^2 36^\circ \\ &= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &= \frac{10-2\sqrt{5}}{16}\text{[注5]} \\ \sin 36^\circ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

(3) AB を求める

直角三角形 OAH より,

$$\mathrm{AH} = 16\sin 36^\circ = 16\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = 4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

よって,

$$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AH} = 8\sqrt{10-2\sqrt{5}} \fallingdotseq 18.8091$$

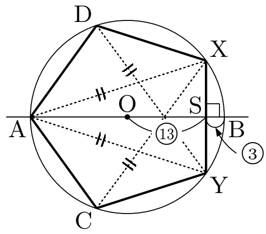
と求めることができました。最後の近似値は, 当然電卓を用いて求めています。

さて, 以上で半径 16 の円に内接する正五角形の一辺の長さがわかりました。これで「エセ正五角形」の誤差の「基準」ができたことになります。では早速,「エセ正五角形」のそれぞれの辺の長さを測定してみることにしましょうか。ここからが本題ですよ!

[注5] 次行でどうせ平方根をとるので, 敢えて約分はしていません。

5　「エセ正五角形」の誤差の測定

では, エセ正五角形の各辺の長さを求めて, 実際の正五角形とどの程度の誤差があるのか求めてみることにしましょう。



右図は, 「**2 エセ？ 正五角形の作図法**」の最後の図（2 ページ【手順 4】参照）の再掲です。ただし, 作図途中に利用した長さ等の情報も書き込んであります。

以下に, 各辺の長さの求め方を記載しますが, DX の長さ以外たいして難しいものではないので, 右の図だけを頼りに是非自分で求めてみてください。なお具体的な長さは, 右図中の辺の比の値 (◯内の数値) をそのまま使っています。つまり, $\mathrm{OS} = 13,\ \mathrm{SB} = 3$ としています。

(1) XY の長さ

これは, 直角三角形 OXS にてピタゴラスの定理 (三平方の定理) を用いればよいので簡単です。

$$16^2 = 13^2 + \mathrm{XS}^2$$

$$\therefore\ \ \mathrm{XS} = \sqrt{16^2 - 13^2} = \sqrt{87}$$

$$\mathrm{XY} = 2\mathrm{XS} = 2\sqrt{87}$$

(2) AD, AC の長さ

これは一見難しく見えますが, $\triangle\mathrm{AXY} \equiv \triangle\mathrm{YAD}$ に気付けば $\mathrm{XY} = \mathrm{AD}$ であることがわかります。つまり,

$$\mathrm{AD}\ (= \mathrm{AC}) = \mathrm{XY} = 2\sqrt{87}$$

です。

さて, 合同の理由ですが, そんなに難しくはありません。等しい弦から作られる円周角の大きさはすべて同じです。弦 DY = 弦 YA = 弦 AX =

弦 XC ですから，これらの弦から中心がある方向に作った円周角はすべて等しいので，

$$\angle\mathrm{DAY} = \underbrace{\angle\mathrm{YDA} = \angle\mathrm{YXA}}_{\text{弦 YA から}} = \underbrace{\angle\mathrm{AYX} = \angle\mathrm{ACX}}_{\text{弦 AX から}} = \angle\mathrm{XAC} \quad \cdots\cdots ①$$

$\triangle\mathrm{AXY}$ と $\triangle\mathrm{YAD}$ において，2 組の辺の長さは明らかに等しいですから，それらの挟む角である$\angle$ YAX と$\angle$ DYA が等しければ良いのです。

$$\angle\mathrm{YAX} = 180^\circ - \angle\mathrm{YXA} - \angle\mathrm{AYX}$$

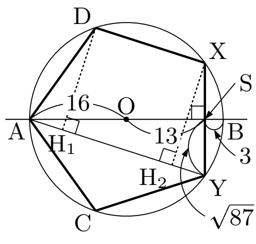
$$\angle\mathrm{DYA} = 180^\circ - \angle\mathrm{DAY} - \angle\mathrm{YDA}$$

①により，右辺に出てくる $\angle\mathrm{YXA}$, $\angle\mathrm{AYX}$, $\angle\mathrm{DAY}$, $\angle\mathrm{YDA}$ の大きさはすべて等しいので，2 本の等式の右辺の値は等しく，よって左辺の値も等しいので，

$$\angle\mathrm{YAX} = \angle\mathrm{DYA}$$

これで，それぞれの三角形の等しい 2 辺を挟む角が等しいことがいえました。

(3) DX, CY の長さ



これは，高校で学ぶ三角比の中の余弦定理を使う方法など色々考えられるところですが，ここでは中学生レベルの知識だけで解いてみます。

右図を見てください。図中にか描かれていませんが，(2) から AD = XY ですから，四辺形 DAYX は等脚台形です。

直角三角形 YAS にピタゴラスの定理 (三平方の定理) を利用すると，

$$\mathrm{AY}^2 = 29^2 + (\sqrt{87})^2$$

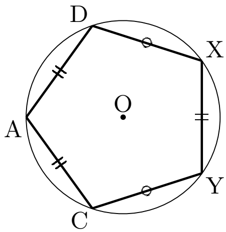
$$\therefore\ \mathrm{AY} = \sqrt{29^2 + (\sqrt{87})^2} = \sqrt{928} = 4\sqrt{58}$$

点 D, 点 X から辺 AY に垂線を下ろし，その足をそれぞれ点 H_1, 点 H_2 とおきます。すると，等脚台形の左右にできた 2 つの直角三角形は合同で

す。また, $\triangle \mathrm{XYH_2}$ と $\triangle \mathrm{AYS}$ は $\angle \mathrm{Y}$ が共通な直角三角形なので相似です。よって,

$$\mathrm{XY} : \mathrm{AY} = \mathrm{YH_2} : \mathrm{YS}$$
$$2\sqrt{87} : 4\sqrt{58} = \mathrm{YH_2} : \sqrt{87}$$
$$\therefore\ \mathrm{YH_2}\ (= \mathrm{AH_1}) = \frac{2\sqrt{87}\cdot\sqrt{87}}{4\sqrt{58}} = \frac{87}{2\sqrt{58}}\cdot\frac{\sqrt{58}}{\sqrt{58}} = \frac{3\sqrt{58}}{4}$$
$$\mathrm{DX}\ (= \mathrm{CY}) = \mathrm{AY} - \mathrm{AH_1} - \mathrm{YH_2} = 4\sqrt{58} - \frac{3\sqrt{58}}{4} - \frac{3\sqrt{58}}{4} = \frac{5\sqrt{58}}{2}$$

以上の結果から, エセ正五角形の作図を用いると右図のように 5 つの辺が 2 種類の長さに分類されることがわかりました。「**4 円に内接する正五角形の一辺の長さ**」から, 正確な正五角形の一辺の長さは約 18.8091 でした。これを基準に, 正確に今回の数値と誤差を求めると,



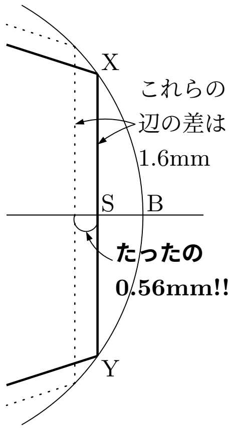
の 3 辺の長さは, $2\sqrt{87} \fallingdotseq 18.6548$　誤差 -0.82%

の 2 辺の長さは, $\dfrac{5\sqrt{58}}{2} \fallingdotseq 19.0394$　誤差 $+1.22\%$

となります (電卓使用)。

いや〜, 中学生とはいえかなり正確な方法を編み出しましたねぇ。誤差約 1%。ほぼ許容範囲内です。

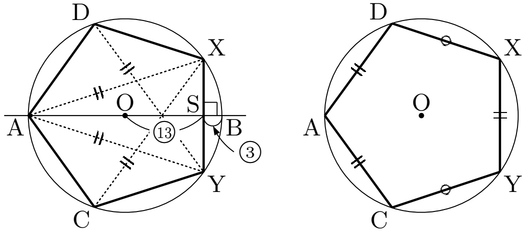
今の結果に単位'cm' を付けて考えてみます。すると, 今回半径 16cm のちょっと大き目の円に内接するエセ正五角形を描いたことになります。今まで求めた数値でみてみると, 短い辺で 1.6mm, 誤差の大きかった長い辺でも 2.3mm しか変わらないことになります。前ページの図中の S の位置でいえば, 本当の正五角形の場合と比べて 0.56mm しか点 B 側に寄っていないのです![注6]



注6 右図参照。この計算は示しませんが, 5 ページの最上の図で OH の長さが約 12.9443 と求められます (エセの場合ちょうど 13)。太線がエセ正五角形, 点線が正確な正五角形を表しています。

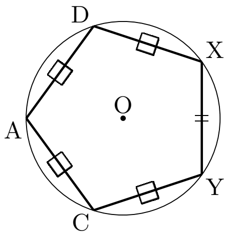
6　エセ正五角形の作図法 (改)

まぁコレで終わっても良いんですが, 誤差が微妙に 1% を超えているのが残念といえば残念。細かいことですがやはり誤差を 1% 以内にしたいなぁというのがオトナの感覚です (そうなのか!?)。誤差が 1% 未満と言われれば, 「お〜, 誤差がないに等しいではないか!」と思えますよね?(だから, ホントにそうなのか!?)



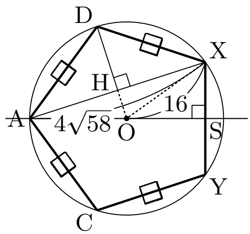
そこで, 改善案を考えてみました。エセの作図法で, 最初の点 S の位置を変えないと仮定した場合（右図の左側参照）, 最後の点 C, D の位置が若干点 A 寄りになっているために —○— の長さが長くなっているようです（右図の右側参照）。

このことから, エセ正五角形の手順（2 ページ参照）中,【手順 3】の点 C を求める作図を, 弧 AY の中点として求めるようにしてみます。具体的には, 弦 AY の垂直二等分線を引いて円 O との交点を C とするわけです。点 D も同様です。



すると, 結果的に長さ関係は右図のようになり, 最初の XY だけが正しい正五角形よりも若干短いだけで, あとの 4 辺は同じ長さとなります。—○— の長さがなくなった分, 相当誤差が減っているハズです。

では, 今新たにできた —□— の長さを計算してみましょう。



右図を見てください。もちろん, 円の半径は 16 のままです。「**5 「エセ正五角形」の誤差の測定**」で得られた AX の長さはすでに記入してあります。

まずは, OH の長さを求めます。これは, 直角三角形 OHX でピタゴラスの定理（三平方の定理）を用います。

$$
\begin{aligned}
16^2 &= (2\sqrt{58})^2 + \mathrm{OH}^2 \\
\therefore\ \mathrm{OH} &= \sqrt{16^2 - (2\sqrt{58})^2} = 2\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

これより, $\mathrm{DH} = \mathrm{OD} - \mathrm{OH} = 16 - 2\sqrt{6}$ です。

DX の長さは, 直角三角形 DHX でピタゴラスの定理 (三平方の定理) を用います。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DX}^2 &= (16 - 2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{58})^2 \\
\therefore\ \mathrm{DX}\ (= \mathrm{AD} = \mathrm{AC} = \mathrm{CY}) &= \sqrt{(16 - 2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{58})^2} \\
&= \sqrt{512 - 64\sqrt{6}} = 8\sqrt{8 - \sqrt{6}} \fallingdotseq 18.8476
\end{aligned}
$$

最後の値は電卓使用です。

さて,「**4 円に内接する正五角形の一辺の長さ**」から, 正確な正五角形の一辺の長さは約 18.8091 でした。また,「**5 「エセ正五角形」の誤差の測定**」から, XY の長さは約 18.6548 で, 正確な正五角形からの誤差は -0.82% です。そして今回求めた 4 本の —□— の長さは約 18.8476。その誤差は何と, $+0.20\%$!!

まぁ XY の誤差が -0.82% ですから, 4 辺でこの誤差を相殺するには 1 辺について $+0.20\%$ くらいになるのは当たり前だろうという声も聞こえてきそうですが, 改めて計算によってこのことを実証した形となりますね。

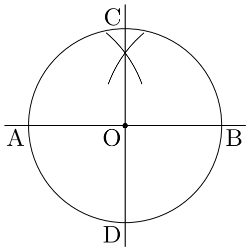
というわけで, オトナの都合により中学生の編み出した作図法を若干改訂してみましたが, これでめでたくすべての辺の長さの誤差が 1% 以内となり, オトナの方々もさぞかし満足のことと思いますがいかがでしょうか。

7　本当の正五角形の作図法

さて, 意外とご存じない方も多いと思われる, 実際の正五角形の作図法をここで紹介しておきます。

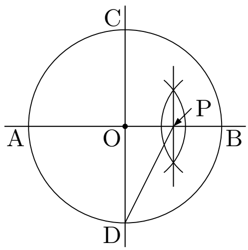
【手順 1】

円 O があり, その直径を AB とする。
直径 AB と垂直な直径 CD を作図する。



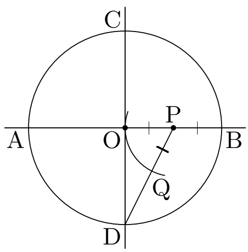
【手順 2】

半径 OB の中点 P を作図し, 点 P と点 D を結ぶ。



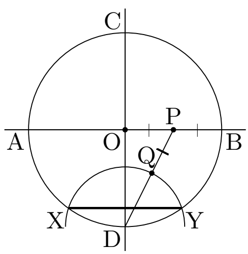
【手順 3】

点 P を中心として半径 PO の円を描き, 線分 PD との交点を Q とする。



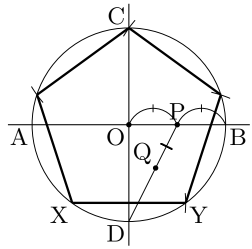
【手順 4】

点 D を中心として半径 DQ の円を描き, 円 O との 2 つの交点を X, Y とする。



【手順 5】

線分 XY を一辺とする正五角形を描く。



ご覧になっておわかりの通り, 無理矢理黄金比 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos 36^\circ\right)$[注7]を作っているだけですね。

一応簡単に解説しておきます。円の半径を 1 とすると,【手順 2】でその半分である $\dfrac{1}{2}$ を OP として, そし て $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ を PD として作図しています。よって,【手順 3】で線分 DQ の長さは $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ となります。【手順 4】の線分 DY の長さも, この線分 DQ の長さと同じです。

最後の【手順 5】の図で, 線分 OD と線分 XY の交点を H とおきます。$\mathrm{OH} = x$ とおいて, 2 つの直角三角形 OHY と DHY の両方でピタゴラスの定理 (三平方の定理) を用いると,

$$\triangle\mathrm{OHY}\text{ より,}\quad \mathrm{HY}^2 = 1^2 - x^2$$
$$\triangle\mathrm{DHY}\text{ より,}\quad \mathrm{HY}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - (1-x)^2$$
$$\therefore\ 1^2 - x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - (1-x)^2$$

が成り立ちますから, これを解いて $x\ (= \mathrm{OH}) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ とわかります。このようにここが黄金比になれば $\angle\mathrm{YOH} = 36^\circ$ となります（直角三角形 YOH に注目するとわかります）から, 全体の多角形が正五角形となるのです。

[注7] 5 ページ参照

8　隠された「黄金比」

さて, これまでエセ正五角形の作図, そして正しい正五角形の作図と見てきました。そして調べてきました。エセの方は, 若干正確さを増す努力もしてきました。

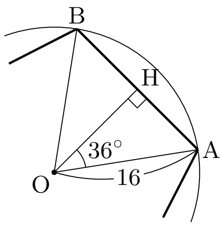
これですべて終了！

……と言いたいところですが, まだ「数値的な謎」が残されています。

エセの最初に登場した, しかも特段数学が得意というわけでもないごく普通の中学生が偶然発見した「13 : 3」という, 一見して何の変哲も無い単なる「比」。そもそもこの「比」は何故 13 や 3 という数字を使うことになったのか。最後に, この比に関する, 何とも恐ろしい真実が明かされることになります。

本来なら, このあとのたったの数ページでは語り尽くすことはできない程の美しい数学の世界が見えてきます。そこには, もはや「図形」など微塵も登場しない, 「数字」の美の世界が待ち受けています。

とその前に。再度正五角形の図を確認してみましょう。



$\sin 36^\circ$ や $\cos 36^\circ$ は, 「**4 円に内接する正五角形の一辺の長さ**」で求めています。

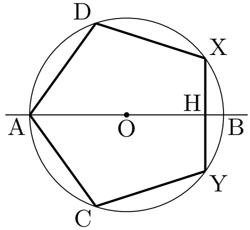
$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

でした。よって, 右図で

$$\mathrm{OH} = 16 \times \cos 36^\circ = 4 + 4\sqrt{5} \fallingdotseq 12.9443$$

となります。まぁここでは概数はヤメにして, まともに数値を求めてみましょう。

まずは, 今回の「エセ!? 正五角形」の場合。これは単純で



$$\mathrm{AO} : \mathrm{OH} : \mathrm{HB} = 16 : 13 : 3$$

となります。次に「正しい正五角形」の場合。これは先に出した三角比を用いて

$$\mathrm{AO}:\mathrm{OH}:\mathrm{HB} = 16 : (4+4\sqrt{5}) : (12-4\sqrt{5})$$

となります。$\mathrm{HB} = 16 - \mathrm{OH}$ ですからね。仮に, $\mathrm{HB} = 1$ とすると, すべての比を $12-4\sqrt{5}$ で割れば良いので（途中計算は省略しますが）

$$\mathrm{AO}:\mathrm{OH}:\mathrm{HB} = (3+\sqrt{5}) : (2+\sqrt{5}) : 1$$

さて唐突ですが, 皆さんは「フィボナチ数列」というものはご存じでしょうか。それこそ「黄金比」と言えばフィボナチ数列。「正五角形」と言えばフィボナチ数列……と言われるほど, 関係性が深いものです。

しかし図形的なことは抜きにしても, フィボナチ数列の作り方は小学生でも判るほどいたって簡単です。つまり, 最初の 2 項を 1, 1 として, 第 n 項は第 $n-1$ 項と第 $n-2$ 項を加えることによって求めるという漸化式によって数列を作れば良いのです。え？　専門用語が多くてわからない？

具体的には……

$$\begin{aligned}
&\text{第}\,1\,\text{項} = 1\;,\quad \text{第}\,2\,\text{項} = 1\;(\text{以上, 初期値})\\
&\text{第}\,3\,\text{項} = \text{第}\,2\,\text{項} + \text{第}\,1\,\text{項} = 2\\
&\text{第}\,4\,\text{項} = \text{第}\,3\,\text{項} + \text{第}\,2\,\text{項} = 3\\
&\text{第}\,5\,\text{項} = \text{第}\,4\,\text{項} + \text{第}\,3\,\text{項} = 5\\
&\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

都合, 「1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ……」という数列ができあがり, これをフィボナチ数列というのです。何故そう呼ばれるか……など語り出すと, それこそを新たな記事が出来てしまうほどですから, それはまた後日ということにしましょう。ひとまず一般項だけ示しておくと

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

であり, 数式に無理数が出てくるのにも関わら n がどんな自然数でもその値は必ず自然数になる, という摩訶不思議な数式となっています。

さて, 今回は「エセ!? 正五角形」の 3 : 13 の秘密に迫ることが目的です。

実はこの 3 と 13。フィボナチ数列に登場するのです。そう, 3 は第 4 項, 13 は第 7 項です。つまり, 3 項飛ばしなわけです。これをずっと大きな数値でやってみると, より正確な「エセ!? 正五角形」が描けるのです。

その秘密は, フィボナチ数列の隣接 2 項間の比。整数値で, しかも等比数列ではないわけですから, その比は一定ではありません。しかし, その比の極限を求めてみると……

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}}$$

$$=\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$=\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と, 何とここでも黄金比が出てくるのです！　この結果が何を言っているかというと, つまり「等比数列」ではないこのフィボナチ数列が, n を大きくしていくとあたかも公比が黄金比である「等比数列」のようなふるまいを見せますと, ということを言っているのです。言い換えると, フィボナチ数列は「黄金比の n 乗（の定数倍）」に近似されますよ, とも言うことができます。

さて, 「エセ!? 正五角形」の最初の比は 3 : 13 で, フィボナチ数列では第 4 項と第 7 項でした。ここから既に黄金比で近似された等比数列であると見なすと

$$a_7 = (\text{黄金比})^3 \times a_4$$

ということになります。ここで $(\text{黄金比})^3$ を実際に計算してみると

$$(\text{黄金比})^3 = 2 + \sqrt{5}$$

……おや!?　どこかで見たことのある数値です。そう,「正しい正五角形」に於ける比 $\mathrm{AO} : \mathrm{OH} : \mathrm{HB}$ で $\mathrm{HB} = 1$ とした場合の OH の値に等しいのです。

このことから, HB の値をフィボナチ数列に登場する値にすると, その 3 項先の値を OH にすると正五角形に近似できることがわかりました。

それにしても, 1 人の中学生が思いついた $3 : 13$ という比から, こんなに深い内容まで突っ込んで論議することができるとは驚きです。無邪気な子供たちの何気ない発言も, 一見「間違い！」と言いたくなるところを「いや待てよ」と一呼吸置いてみる。するとこのような見たこともない数学の扉が開かれることもあるのです。