大きな数

2012.11.25
Written by **ma–.** (caLabo.)

1　はじめに

まずは, こちらをご覧下さい。

「フカシギの数え方」[注1]

すでに 100 万回以上再生されている人気動画ですから, ご覧になっていた方も多いかと思います。この動画では最後に大きな数の単位として「じょ」(のぎ偏に予という漢字です) が登場しますが, この単位を聞いた事があったという方はそう多くないと思います。

今回から数回に分けて, この「大きな数」について紹介していきたいと思います。

2　千進と万進

現在日本で用いられている単位は, 一, 十, 百, 千, そして「万」となったときに新しい単位に移行する「万進」と呼ばれる単位です。つまり, 「万」の次は十万, 百万, 千万, そしていわば「万万」とも呼べる単位として新たに「億」があるわけです。万, 億, 兆……と新たな単位になるたびにその大きさが 1 万倍 (10^4 倍) になっている, と言うこともできます。

英語だと, 千が thousand。そして ten thousands (1 万), hundred thousands (10 万) と 10 倍ずつされ, いわば「thousand thousands」に当たる数が million (100 万) となります。いわば「千進」というワケです (実際にそのような呼び方はないかと思います)。thousand, million……と新たな単位になるたびにその大きさが千倍 (10^3 倍) になっている, と言うこともできます。

実際, 世界の共通言語とも言われる英語でのこの数の表記が基本となり, 桁数の区切りを表す「コンマ」は 3 桁毎打つのが慣例です。近代日本では, 「万進」の流儀に従って 4 桁毎打つ流儀もありましたが, 今や使われることはないでしょう。例えば, 「1 億」をそれぞれのコンマのルールに従って記してみ

[注1] クリックすると別ウィンドウで YouTube が開きます。

ると

100,000,000　……現代の世界では一般的な方法
1,0000,0000　……「万進」に合わせた方法

となり, 後者の方が実は日本の使われている単位には合致しています。珠算を学んでいると経験することですが, 珠算の世界では「京」（けい）までは登場します。実際「1 京」をこの 2 つの方法で記してみると

10,000,000,000,000,000　……現代の世界では一般的な方法
1,0000,0000,0000,0000　……「万進」に合わせた方法

であり,「万→億→兆→京」という順番さえ覚えていれば明らかに後者の方がわかりやすいですよね。しかしその珠算も,「そろばん」の盤面を見ると, 五だまと一だまの間にある「はり」にある「定位点」という目印はしっかり 3 桁毎に打たれていますから, 世界の荒波には勝てなかったということでしょうか。残念ながら今登場した「1 京」も,「6 個目の定位点の一つ左の桁」と覚えていくしかありません。

さて, 現在一般的に用いられている「万進」という呼ばれる単位も, 日本古来からずーっと同じ「1 万倍毎」の単位であったわけではないようです。実際, 自分で「最も大きな数を表せるような効率のよい単位」を考えてみましょう。

一, 十, 百, 千, 万までで 1 サイクルとします。すると,「○○万」は「9 千 9 百 9 十 9『万』」の次が「1 万『万』」であり,「万」がダブってちょっと格好悪い事になりますよね。だから新しい単位を考えだそうというワケで「億」が登場します。

「億」の 1 つ手前は「9999 万 9999」なので,「○○億」は「9999 万 9999『億』」の次が「1 億『億』」であり,「億」がダブってちょっと格好悪いことになります。だから「兆」という単位を登場させることにします。

この手法で生み出した「兆」を, 数字を並べて記してみると,「億」は「1」にゼロが 8 つ付く数なので

「1 億」億
→「100000000」億

→「100000000」「00000000」

→「10,000,000,000,000,000」(10^{16})

となり, 現在使われている単位で表すと「1 京」となり, かなりズレてきます。

もう 1 回だけ続けてみましょうか。「1 兆」(10^{16}) まで作ったところでした。同様にして「1 兆『兆』」とダブる数を「1 京」とすると, 「1 兆」は「1」にゼロが 16 個付く数なので

「1 兆」兆

→「10^{16}」$\times 10^{16}$

→ 10^{32}

と, 「1 京」はゼロが 32 個付く数ということになります。

もうおおよその規則がわかってきたかと思いますが, この規則を続けて新たな単位を作っていくと, ゼロの数が倍々に増えていくことになります。「万」を 1 つ目, 「億」を 2 つ目と単位を数えていくと, 10 個目の単位になったときには何とゼロが 2,048 個も付く超巨大数となり, 単純に大きな数を表す単位を作ろうとしたときには相当効率の良い方法となります。

では, 何故実際にそのような方法で単位を作っていかなかったのでしょうか。これは私の想像ですが, きっと「覚えずらい」こと, そして「口頭で表現したときに大きさの感覚が掴みづらい」ことにあるように思います。

例えば, 珠算の読上算を思い出してみてください。競技の難易度を上げるために, 同じ「16 桁」の問題でも「7 桁〜16 桁」と「どの桁数が登場するかわかりずらい」よう幅を付けることが一般的です。この桁数設定だと, 例えば「千〜〜〜」と読み始めたときに, その数が 8 桁 (千万) の数なのか, 12 桁 (千億) の数なのか, 16 桁 (千兆) の数なのか, 大きさの単位を読まれるまで判断できず, 競技者もその発声を待ってからそろばんに数を置いていくしかないのです。

今作ってみた「効率の良い方法」で数を表したとして, 例えば「千兆〜〜〜」と始まったときに, その数が普通に「千兆」の桁数 (この方法だと 20 桁の数) なのか, 「千兆〜〜〜『京』」の桁数 (この方法だと 52 桁の数) の桁数なのか, 最後に「京」と言うかどうかまで 20 桁分の発声を待つ必要があるのです。20 桁と 52 桁では大違いですよね。ですから, ある程度の桁数で無理矢理新しい

単位を持ち出すようにする方が, 数の大きさを素早く伝えやすいということになるのです。

先程「万進」という数の単位の進め方を紹介しました。これも, 「ある程度の桁数で無理矢理新しい単位を持ち出す」「無理矢理」を 4 桁毎に設定した方法である, と言い換えることができます。しかしこれが果たして「誰が見ても間違いなく一般的か」と言われるとそうでもないようで, 京までは「万進」で, それ以降は「万万進」と呼ばれる, 「無理矢理」を 8 桁毎に設定した方法で進めるのだ, とする意見もあるようです。

さて, 日本の話ばかりしてきましたが, 実は西欧でも同じような「桁の上がり方」の問題があります。

例えば英語で記載してみます（フランス語等でも同様です)。冒頭で thousand thousands を million であると紹介しました。ここまでは良いとして, その次の単位である billion は果たして幾つなのか, 国によって異なっているのです。

現代日本で言うところの「万進」に相当する「千進」で表現するのが主にアメリカ。つまり「billion = thousand millions」というわけで, 10 億（10^9）となります。ところが, いわば「効率」を求めて「万万進」に相当する「billion = million millions」とするのが主にイタリアやフランス。これは 1 兆（10^{12}）となります。そう, 今でも国によってその大きさが異なるのです。

イギリスも, つい最近とも言える 1974 年に, 政府が short scale（ここで言う「千進」）を用いるを宣言したので, 今ではかなり広く行き渡っている状況です。実は「千千進」は一昔前までは「イギリス表記」などと呼ばれるほどイギリスで一般的に使用された記法でした。

billion の次は trillion。言わば「千進」だと「trillion = thousand billions」であり 1 兆（10^{12}）, 言わば「千千進」だと「trillion = million billions」（さすがに最高効率の billion billions ではありません）であり 100 京（10^{18}）となります。

ここまでは「前段」なのですが, 随分長くなってしまいました。おかげで, 冒頭で紹介した動画に登場する「じょ」についてもまったく触れられていません。

次は, 実際にこの「大きな数の単位」について紹介したいと思います。そして, 皆さんが「これは大きな数になるだろう！」と思う数を実際にこのような単位で表現するとどの程度になるのか, そういったことにも触れてみたいと思います。

3　命数法 その1

「フカシギの数え方」に戻ります。

えっ？　何のことかって？

そういう方は, 冒頭をご覧下さい。動画へのリンクを貼ってあります。

とにかく, 大きな数を扱うのです。動画では「じょ」という単位が登場しました。さて, このような大きな数が出てくる場面には, どのような場面があるのでしょうか。

まずは, 現在「一般的」と言われる大きな数の単位について記しておきます。現在一般的に用いられている単位は「万進」でした。つまり, 1万（10^4）倍ごとに新しい単位となるのでした。

では, 早速紹介します。

万（まん）	……	10,000（10^4）
億（おく）	……	100,000,000（10^8）
兆（ちょう）	……	1,000,000,000,000（10^{12}）
京（けい）	……	10,000,000,000,000,000（10^{16}）
垓（がい）	……	10^{20}
じょ	……	10^{24}
穣（じょう）	……	10^{28}
溝（こう）	……	10^{32}
澗（かん）	……	10^{36}
正（せい）	……	10^{40}
載（さい）	……	10^{44}
極（ごく）	……	10^{48}

恒河沙（ごうがしゃ）	……	10^{52}
阿僧祇（あそうぎ）	……	10^{56}
那由他（なゆた）	……	10^{60}
不可思議（ふかしぎ）	……	10^{64}
無量大数（むりょうたいすう）	……	10^{68}

ようやく「じょ」が登場しましたが, どうやらこの表のまだ前半に位置する単位であるようです。

では, クイズです。次の数はどのくらいの大きさの数になるでしょう。「だいたい〇〇桁の数かな」と想像だけでもしてみてください。

(1)　1 年間の秒数
(2)　光が 1 秒間に進む距離 (m)
(3)　光が 1 年間に進む距離 (m)
(4)　地球から宇宙の果てまでの距離 (m)
(5)　炭素 12g の中に含まれる炭素原子の数
(6)　2 を 100 回かけ算した数

では, 答え合わせです。

(1) は小学生でも, 頑張って計算すれば求めることができます。1 分は 60 秒, 1 時間は 60 分なのでこれに 60 を掛けて 3,600 秒, 1 日は 24 時間なのでこれに 24 を掛けて 86,400 秒, 1 年は 365 日なのでこれに 365 を掛けて, 正解は約 3,000 万秒, 8 桁の数です。

生まれてからすぐに喋れるようになったとして, 生まれた瞬間から一睡もせずに 1 秒間に 1 ずつカウントしていっても, 人生 80 年の間に 24 億程度までしか数えられないということになります。「ボク, 頑張って 1 兆まで数えるんだ！」……初めて聞くと, 頑張ればできそうに思う方もいらっしゃるかも知れませんが, 1 秒間に 100 ずつカウントしても無理ですから残念ながら不可能です。

(2) はいわゆる「光速」という奴で, 物理の勉強をしていると暗記していなければならない数値です。正解は約 3 億メートル, 9 桁の数です。

どこまでも一瞬で到達しているように見える光であっても, その速さは有限。地球から太陽までの平均距離は約 1,500 億 m（この数値を「天文単位」と呼びます）であり, 光でも 500 秒（8 分強）かかることがわかります。宇宙はとてつもなく広いのです。

(3) は, そんな光が 1 年間に進む距離を求めようということですが, (2) の答えを (1) の答えでかけ算すればすぐに求められます。正解は約 9,500 兆 m, 16 桁の数です。

ちなみに, 地球から最も近い恒星は太陽ですが, 現在発見されているその次に近い恒星は, ケンタウルス座のアルファ星と呼ばれる連星で, その距離は約 4.3 光年, メートルで表すと約 4 京 m, ようやく「京」が登場しました。

「宇宙には知的生物がいるのか？」……人類がずーっと気になっている問題かも知れません。この太陽以外での最近の恒星にそのような惑星があったと仮定してみても, 光でも 4 年以上掛かるような長旅をしなければそのような生物に出会うことはできません。

(4) は様々な説があるようですが, 現在のところ「共動距離」と呼ばれる「観測可能な宇宙の果て」までの距離は約 465 億光年と推定されています。メートルに直すと約 550 じょ m, 遂に念願の (?)「じょ」の登場です！

ちなみに, 宇宙の年齢は約 137 億年と推定されていますから, 光の速さよりも速く宇宙の果てが遠ざかっていることがわかります。実際, 現在宇宙の果ては光速の約 3.5 倍の速度で遠ざかっていることが観測でわかっています。宇宙って広いだけではなく, 何か「あり得ないもの」であるような気さえしてきます。

宇宙から離れて, (5) です。今度は非常に小さい「原子」の数を求める問題ですが, 炭素原子の原子量は 12 なのでちょうど 1 モル（ここで「モル」って何？という質問には答えないことにします。高校生になったら化学ですぐに学びます）です。つまりアボガドロ数（これも「モル」と同じ頃に学びます）そのものですから, 約 6,000 垓個, 24 桁の数です。

おっと, ほんの少し宇宙の果てまでの距離に負けてしまいました。

(6) は人工的に作り出される数の例としてあげておきました。いわゆる 2^{100}

です。正解は約 130 穣, 31 桁の数になります。

宇宙の果てをも超える数となりましたね。つまり, 人工的に作り出される数には, 宇宙をも圧倒的に凌ぐ大きさの数もあるということがわかります。例えば冒頭の動画で紹介したような「組み合わせ」も良い例です。

では, 人工的に作り出される数のうち, 考えられる最大の数はどのくらいの数なのでしょうか。

「えっ!?　無量大数じゃないの？」なんて考えてしまったあなた。それは甘いですよ！

(6) の問題をちょこちょこっといじって, $2^{1,000}$ を考えてみると, あらビックリ, 何と 302 桁の数になるではありませんか！　大きな数で紹介した単位で表すのは到底不可能な大きさです。こうなると, 「1×10^{301}」というような「指数表記」をしなければならないわけです。

いや待てよ？　実は「無量大数」をも凌ぐ単位が存在するのかも!?

次は, このような「無量大数なんてチョロイチョロイ！」な話をしたいと思います。

4　命数法 その 2

去る 2010 年 10 月 11 日, コンピュータ将棋がプロ棋士に挑戦するという世紀の一戦が行われました。この時対戦したのは, 当時女流王将の称号も持っていた清水市代。さすがにまだまだコンピュータが平手（ハンデなしという意味）でプロに勝つ事はないだろうと言われていたものの, 何とものの 86 手でコンピュータ側が勝利。世間を驚かせました。

この時のコンピュータ将棋ソフトですが, 実は市販されているソフト 4 種類のベースとなるソフトを使い, それらが 1 手 1 手計算してはじき出した最善手 4 つを, 更にこれらソフトの多数決にて 1 つに絞るという「合議制システム」を取り入れていました。

そしてこのシステムの名称（このコンピュータ将棋ソフトの名称と言っても良いでしょう）, 覚えていますか？

正解は「**あから**2010」。

さて, この名称に隠された「意味」とは, 一体どのようなものだったのでしょ

うか。

前章までで, 無量大数でも表記しきれない数が無数に存在することは述べました。よく考えれば当たり前のことですが, 良く「天文学的数字」と言うように, 宇宙の果てまでの距離をミクロン（100 万分の 1 メートル）で表しても無量大数まで行かないわけですから, とても人間が想像できるような数ではないような気もします。

特に, このシリーズ冒頭でも紹介した「組み合わせ」の世界では当然のようなこのような想像を絶するような巨大数が登場します。「フカシギの数え方」では 10×10 の場合の順路までしか登場しませんでしたので, その組み合わせの数も 25 桁の数止まりでした。1 無量大数は 69 桁の数。73 桁以上になると無量大数でも表すことができなくなります。そしてこの順路の組み合わせの数も, 18×18 の場合に 79 桁の数となりますので, 無量大数というような単位でも表現できない領域に達してしまうのです。今日現在, 21×21 の場合までしか求められていませんが, この場合は遂に 100 桁の大台を超え 107 桁の数となっています。更に大きな盤面で順路を数えようとする場合, 更に計算時間を掛けるか, はたまた更に効率の良いアルゴリズムを編み出すしかありません。

いずれにせよ, もう「天文学的数字」なんて表現では全然足りないのです。宇宙の果てをも超える想像力が必要になってきます。

さて, 冒頭の将棋ソフトの名称となっている「あから」。語源は「阿伽羅」, 読み方は当然「あから」。何だか中国語のような名称ですが, 実はこれも数の単位だというのです！

もうここからは筆者にもサッパリわからない世界に突入するので, Wikipedia の記事を参考に書きます。ご了承ください。

それは「華厳経の巻第四十五, 阿僧祇品第三十」と呼ばれる仏典に記述されている命数法。何と 123 種類の「上数」と呼ばれる命数法が記されているらしく, 10 の 5 乗, つまり 6 桁の数を「洛叉」と呼び, 「100 洛叉」, つまり 8 桁の数を「倶胝」と呼び, これを「上数」の最初としています。

以下, 10 の 14 乗（15 桁）を「阿ゆ多」, 10 の 28 乗（29 桁）を「那由他」（先に紹介した「那由他」は 10 の 60 乗でした）, 10 の 56 乗（57 桁）を「頻波羅」と呼び, ここまでは先に紹介した巨大数の命名法「無量大数」の範疇に

収まっています。

ここまでで気付いた方もいらっしゃるかもしれませんが, この命数法は 10 に乗る指数が倍々になっていることが特徴です。これはその 1 で紹介した「万進」とか「万万進」を思い出していただきたいのですが, 最も効率の良い命数法と言えます。

そこで, 次の単位は 10 の 112 乗（113 桁）と一気に跳ね上がります。これを「矜羯羅」と呼ぶようです。そして次は 10 の 224 乗（225 桁）, これを「阿伽羅」と呼びます……そう, 今回登場の将棋ソフトの名称になったあの「阿伽羅」です！

その由来は, 数学の「組み合わせの数」にも関係ありました。

将棋は, 先手と後手が 1 手ずつ駒を進めることによって成り立つゲームですが, たった 9 × 9 の盤面に裏表合わせて 14 種類の駒しかないにもかかわらず, 盤面全体が同一になることは殆どありません。

初期の盤面を 1 通りとします。ここからは将棋の駒の動かし方がわかる方にしか理解できないかも知れませんが, 先手が最初に指す事に出来る駒は 17 種類, どこまで進めるかということも考慮に入れると初手としてあり得る手の数は 30 通りとなります。この 30 通りの盤面に対し, 後手の手は果たして何通りあるか……と考えていくと, 将棋はルール上いつかは勝負がつく（引き分けも含めて）ので, パターンの総数を計算することができることになります。

このパターンの総数が, だいたい「阿伽羅」という単位を用いる数に近い数だというのです！

これを「天文学的数字」と呼ぶのなら, 宇宙の果てなど何てちっぽけな数値なことか！　「数そのもの」ではなく, 数の「桁数」が 10 分の 1 に過ぎないのですから……

さて, 話は更に続きます。

この「阿伽羅」, 先に紹介した仏典から持ち出した単位のまだ 6 番目。全部で 123 種類の単位が示されているとのことでしたが, 更に 10 の上に乗る指数が倍々になるのでしたから, この最後 123 種類目の数の桁数は「阿伽羅」の「2 の 117 乗」倍になっているはずです。

そして, その最後となる 123 番目の単位は「不可説不可説転」, その桁数は

何と「37218383881977644441306597687849648129 桁」！　一体何が起きたのやらと言いたくなるこの桁数, もはや「桁数そのものが超巨大数」となっています。みなさん, この数の大きさ, 想像できますか？　1 桁を 1 ミクロンで書いたとしても, この桁の数を宇宙全体の直径内に一列に表記することはできないくらいの巨大数……まさに「想像を絶する」とはこのことです。

さて, もう巨大数も良いだろうと思ったアナタ。
それは甘い！
人間の想像は, この「不可説不可説転」すら遥かに凌ぐ領域に達しているのです……

5　人類が想像しうる超巨大数をつくる

いよいよ宇宙全体の直径内に書き表すことが不可能な領域に達してしまった「不可説不可説転」。しかし, どれだけ桁数を増やそうとも, その数が「有限」であることには変わりがありません。

今から 20 年前になりますが, フジテレビの深夜番組に「皆殺しの數學」という番組がありました。MC(？) は数学者の秋山仁。取り上げる話題がかなりマニアック (？) だったためとてもゴールデンでは放映できないような内容だったわけですが, それでも数学好きにはなかなか面白い番組でした。
その番組のオープニングだったか, エンディングだったか, このような文句が必ずテロップとして表示されました。筆者も正確には覚えていないのですが, 「無限の中よりも, 有限の中に潜む悪魔をあなたはまだ知らない」みたいな文言でした。
「無限の猿定理」も有名です。これも「無限」と銘打っておきながら「有限」の恐ろしさ (？) を見せしめるような問題です。サラッとでも良いので, 是非とも研究してみてください。

さて, 果たして人類は, どの程度「有限の限界」に辿り次いでいるのでしょうか。恐ろしいような気もしますが, ちょっとだけ覗いてみることにしましょう。

さて, 巨大な数を作る方法としてどのような方法が思いつくでしょうか。

(1)　n 倍

かけ算は, 数を大きくするもっとも原始的な方法だと思われます。

例えば, 1 桁の自然数のなかで最も大きな「9」を取り上げてみます。足し算でこの「9」をどんどん足していくと, 18, 27, 36⋯⋯と大きくなるのですが, 例えば 100 桁の数に到達するまでに果たして何回足せば良いのやら想像もつきません。

これに対し, 「9」をどんどん掛けていくと, 81, 729, 8361⋯⋯と一気に桁が増えていきます。100 桁の数に到達されるにも, たったの (?) 104 回かけ算するだけです。

(2)　累乗

今のかけ算ですが, 結局同じ数を何度もかけ算すると巨大になることがわかりました。この計算は「累乗」という表示が可能です。例えば, 「9」を 9 回掛ける計算は　9^9　で済みます。

そこで⋯⋯

(3)　累乗の累乗

はて？　何を言っているの？　と思った方もいるでしょう。

累乗が巨大な数を作る基本だというなら, その累乗の指数（右肩に乗せる小さな数）そのものを累乗にしてしまえばどうなる？　と考えても不思議ではありません。

例えば, 「9」でやってみます。9^{9^9}　は果たしてどの位の大きさの数になるのか調べてみると

$$9^{9^9} = 9^{387420489} \quad = \cdots\cdots$$

となり, 既に想像を絶する巨大数となります。実際にこの数は, 3 億桁を超える数となります。

それでも, 「不可説不可説転」には遠く及びませんね。ならば⋯⋯

(4)　累乗の累乗を累乗

……もう想像つきましたでしょうか？

そう, 累乗を何回も肩に乗せていけば, どんどん巨大な数を作れるのではないか, というわけです。

(5)　クヌースの矢印表記

さて, 一気にタイトルが「累乗」ではなくなりました。何回も累乗の「指数」を肩に載せていくと, どんどん表示が右上に膨らんでいってキリがないので, この表示をやめて別の表示で累乗を表そうというのがこの「クヌースの矢印表記」です。クヌースとはこの表示法を編み出した数学者の名前ですが, その見た目から「タワー表記」と呼ばれることもあります。

例えば　3^4　を　$3\uparrow 4$　と表記します。たったのこれだけなのですが, いわゆる「小さな数」を用いないため表示が横に伸び, 表示しやすいというわけです。

これを用いると, 先に出てきた　9^{9^9}　も　$9\uparrow 9\uparrow 9$　と簡単に（小さな数を用いることなく）表示することが可能です。

ここで注意して欲しいことは, このクヌースの矢印表記は, 連続した場合計算順序は右側が優先であるということです。つまり,

$$9\uparrow 9\uparrow 9 = 9\uparrow(9\uparrow 9) \quad = 9\uparrow 387420489$$

$$9\uparrow 9\uparrow 9 \neq (9\uparrow 9)\uparrow 9 \quad = 387420489\uparrow 9$$

ということです。上は 3 億桁を超えるのに対し, 下は高々 78 桁の数です。

さて, クヌースの矢印表記はこれだけではありません。この　$9\uparrow 9\uparrow 9$　のように, 同じ数を何度も指数として表示する計算を, この矢印をダブらせることにより

$$9\uparrow\uparrow 3$$

と表示できることとします。これが「悪魔の計算」のスタートです。つまり, 矢印記号の累乗のようなものです（わかりますか？）。

例えば, $9\uparrow\uparrow 8$　は, $9\uparrow 9\uparrow\cdots\uparrow 9$　と「8 回」やれ, ということなのです。

じゃ, もう 1 回矢印を追加すると……

例えば　$9 \uparrow\uparrow\uparrow 8$　は, $9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow 9$　と「8 回」やれ, ということになります。この調子で, 矢印そのものも何重も連続して表示できるように「工夫」したわけです。

さて, 最後に登場した　$9 \uparrow\uparrow\uparrow 8$　は一体どの位の巨大数となるのでしょうか。すでに想像を絶する桁数になることは言うまでもありません。

$$\begin{aligned} 9 \uparrow\uparrow\uparrow 8 &= 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \\ &= 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9^{9^{9^{9^{9^{9^{9^{9^{9}}}}}}}} \\ &= 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow 9 \uparrow\uparrow (\underbrace{9 \uparrow 9 \uparrow 9 \uparrow \cdots\cdots \uparrow 9}_{9^{9^{9^{9^{9^{9^{9^{9^{9}}}}}}}}\text{回}}) \\ &= \cdots\cdots \end{aligned}$$

もちろん, 「不可説不可説転」など既に「みにっちぃ数」に見えています。

で, そのうち「↑」を何回も連続書くのは面倒だということで, 「↑↑↑」を「$\uparrow^3$」と, 今度はここに累乗を使ってしまおう, ということにしてしまいました。何と恐ろしいことでしょう！

(6)　グラハム数

もう新しい表記があるわけではありません。このような「書き表すことができずに想像するしかない」数の中で, 無意味に巨大にしたというだけではなく, 意味のある考察の対象となったことがある巨大数としてギネスブックに認められている数がこの「グラハム数」です。

グラハム数そのものは, 先程までのように「9」を用いて作った数ではなく「3」を用いて作った数で, 関数 $G(x)$ を

$$G(x) = 3 \uparrow^{x} 3$$

と定義したときの

$$G^{64}(4)$$

です。実はクヌースの矢印表記そのものなのですが, その大きさは……

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 3 \uparrow 3 = 27 \\
G(2) &= 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow G(1) = 3^{27} \\
G(3) &= 3 \uparrow^{3} 3 = 3 \uparrow\uparrow G(2) = \underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{27}\text{回}} \\
G(4) &= 3 \uparrow^{4} 3 = 3 \uparrow^{3} G(3) = \underbrace{3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow \cdots\cdots \uparrow\uparrow 3}_{G(3)\ \text{回}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{2}(4) &= G(G(4)) = 3 \uparrow^{G(4)} 3 = 3 \uparrow G(4) - 1(G(4)-1) = \cdots\cdots \\
G^{3}(4) &= G(G^{2}(4)) = 3 \uparrow^{G^{2}(4)} 3 = 3 \uparrow^{G^{2}(4)-1} (G^{2}(4)-1) = \cdots\cdots \\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
G^{64}(4) &= G(G^{63}(4)) = 3 \uparrow^{G^{63}(4)} 3 = 3 \uparrow^{G^{63}(4)-1} (G^{63}(4)-1) = \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

もう, 完全にデタラメに大きな数です。しかし, こんな「とても常人には想像すら出来そうにないほどの巨大数」でも, 研究対象に上がったことのある「有限」の数なのです。

数学とは, かくも恐ろしい学問でしょうか！

ここまで来ると, 如何に「無限」（∞）と片付けてしまった方が楽であるか, と思っていまいます。

「あ!?　グラハム数だぁ？　もう良いよ, 『殆ど無限大』で！」

……そういうわけにもいかないのです。